IRSTI 27.17

Машуров Фарух[1], *Өстемірова Мадина*[2*]
[1,2]SDU University, Қаскелең, Қазақстан
*e-mail: 221101010@stu.sdu.edu.kz

БИКОММУТАТИВТІ АЛГЕБРА МУТАЦИЯЛАРЫНДАҒЫ ТЕПЕ-ТЕҢДІКТЕР

Абстракт. B=(B,·) алгебрасы бикоммутативті деп аталады, егер әрбір a,b,c ∈ B элементтері үшін келесі тепе-теңдіктерді қанағаттандырса:

a·(b·c)=b·(a·c),
(a·b)·c=(a·c)·b.

Біз бұл жұмыста, бикоммутативті алгебраны мутация көбейтіндісі бойынша зерттейміз және мутация көбейтіндісі бойынша кез келген бикоммутативті алгебра үшінші дәрежелі тепе-теңдігін қанағаттандыратынын дәлелдейміз.

Түйін сөздер: мутация, Lie-admissible, көпмүшелі тепе-теңдіктер.

Кіріспе

Ең алғаш, 2011 жылы бикоммутативті алгебраларын А. Жұмаділдаев пен Қ. Туленбаев зерттеген [1]. Бұл алгебралар келесі тепе-теңдіктермен анықталған:

$$a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c),$$
$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b.$$

Еркін бикоммутативті алгебраның базисі [2]-ші жұмыста көрсетілген. Кейде, бикоммутативті алгебраны LR - (left and right) алгебрасы деп те айтады [3].

Енді B алгебрасының p және q екі элементтін бекітіп, жаңа көбейтуді қарастырайық

$$\langle a, b \rangle = (ab)p - b(qa).$$

Жоғарыда анықталған көбейтінді мутация көбейтіндісі деп аталады. Ал, B алгебрасының мутациясы деп, мутация $\langle \cdot,\cdot \rangle$ көбейтіндісімен анықталған жаңа $B_{p,q}$ алгебрасын айтамыз.

$Bicom$ бикоммутативті алгебралар класы болсын және $Bicom_{p,q}$ тұрақты $p, q \in B$ элементтері үшін бикоммутативті алгебралардың мутациясының класы болсын. Қарапайым тілмен айтқанда, $Bicom_{p,q}$ элементтері $B_{p,q}$ түрінде берілген алгебралар, мұндағы $B \in Bicom$.

Классикалық жағдайда Ф. Монтанер алғаш рет ассоциативті алгебраларының мутациялары қанағаттандыратын көпмүшеліктер түріндегі тепе-теңдіктерін зерттеген [4]. 1983 жылы Мюнг, альтернативті алгебраларының мутациялары қарастырылған [5]. Ал, Боерс 1995 жылы, ассосимметрик алгебраларының мутацияларын қарастырып, бұл алгебралардың Ли алгебрасымен қатынасын зерттеді [6].

Жақында ассоциативті алгебраларының мутациялары қанағаттандыратын көпмүшелік тепе-теңдіктер 6-шы дәрежеге дейін зерттелінді [7].

Алгебралардағы тепе-теңдіктерді зерттеу бұл алгебралардың қасиеттерін түсінуде маңызды орын алатын зерттеу бағыты. Ал, екінші бір маңызды бағыт - алгебралық құрылымды жаңа түрге айналдыратын амалдарды (мутацияларды) зерттеу. Алгебралардың мутациясы әртүрлі алгебралар арасындағы қатынастарды түсіну және олардың құрылымдық қасиеттерін зерттеу үшін маңызды болып табылады. Мысалы, 2018 жылы А. Жұмаділдаев пен Н. Исмаилов бикоммутативті алгебраларды мутация көбейтіндісінің $p = \emptyset, q = \emptyset$

$$\langle a, b\rangle = a \cdot b - b \cdot a = [a, b] \qquad \text{(коммутатор)}$$

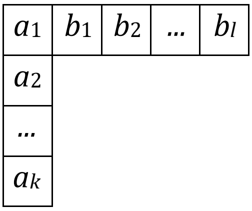
жағдайын қарастырған [8]. Олар, сол жақ нормаланған коммутаторлы элементтерінің еркін бикоммутативті алгебрадағы нақты теңдеуін алды. Осы нәтижені қолдана отырып, олар бикоммутативті алгебрадағы кез-келген коммутаторлы тепе-теңдік анти-коммутативті, Якоби және метабель тепе-теңдіктерінің салдары екенін дәлелдеді.

Бұл жұмыстың мақсаты $Bicom_{p,q}$ қанағаттандыратын тепе-теңдіктерді табу. Бұл жұмыста, біз сол жақ нормаланған мутациялы элементтерінің еркін бикоммутативті алгебрадағы нақты теңдеуін алдық. Яғни, А. Жұмаділдаев пен Н. Исмаилов жұмысындағы нәтижені мутация көбейтіндісі үшін жалпыладық. Сонымен қатар, мутация көбейтіндісі бойынша кез-келген бикоммутативті алгебра үшінші дәрежелі тепе-теңдікті қанағаттандыратындығын дәлелдедік.

Негізгі нәтиже

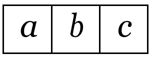
X жиынымен анықталған $B(X)$ еркін бикоммутативті алгебраның базисін еске түсірейік, мұндағы $X = a, b, c, ...$[8]. (n) және $(n - k, 1^k)$ формасындағы Юнг диаграммаларын қарайық, мұндағы $k = 1, \dots, n - 2$ дегеніміз, n дәрежесіндегі негізгі элементтер. Юнг диаграммалары $a_1 \leq$

$a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l$ және $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l \in X$, үшін $k, l > 0$ болатын X элементтерінен алынады және олар келесідей бикоммутативті базис элементтерінің мономиалдары арқылы көрсетіледі:

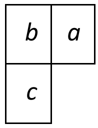


$\longrightarrow a_k(\dots(a_2((\dots((a_1b_1)b_2)\dots)b_l))\dots)$.

Мысал ретінде $B(a, b, c)$ көпсызықты базистік элементтерін $a < b < c$ деп көрсетеміз

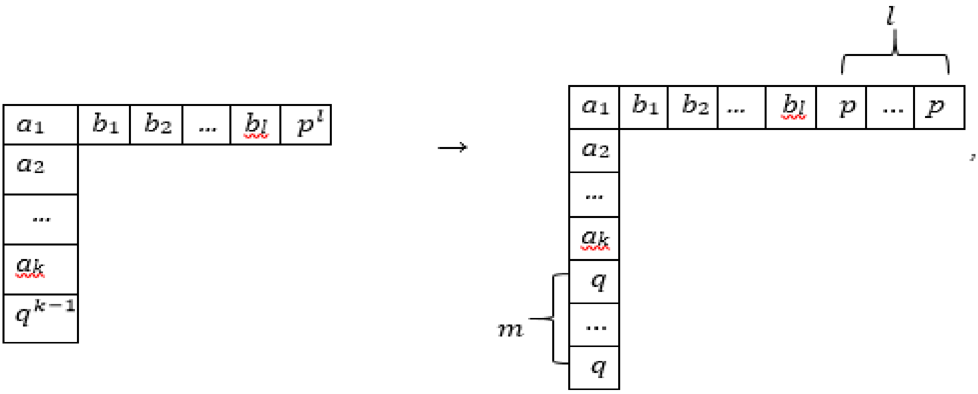


$\longrightarrow (ab)c$,



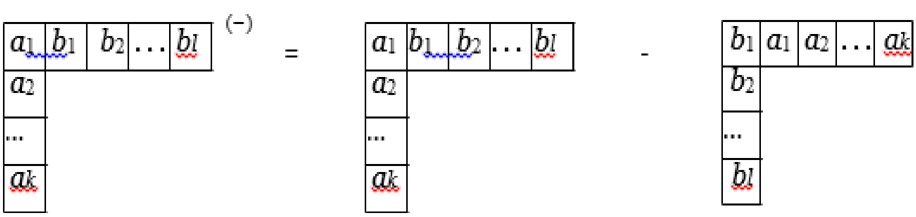
$\rightarrow c(ab)$.

B(X) базистік элементтер бойынша келесі диаграммаларды анық l тайық



Мұндағы p элементтері l рет, ал q элементтері $m = k - 1$ рет кездеседі.

Қосымша кесі диаграммаларды анықтайық



және

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & b_1 & b_2 & \ldots & b_l \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{a_2} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{\ldots} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{a_k} \\ \cline{1-1} \end{array}^{(+)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & b_1 & b_2 & \ldots & b_l \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{a_2} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{\ldots} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{a_k} \\ \cline{1-1} \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline b_1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_k \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{b_2} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{\ldots} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{b_l} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Негізгі нәтижені дәлелдеу үшін бізге келесі екі лемма қажет.

Лемма 2.1. *$B(X)$ алгебрасында келесі тепе-теңдік орындалады*

$$< \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & b_1 & b_2 & \ldots & b_l & p^l \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{a_2} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{\ldots} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{a_k} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{q^{k-1}} \\ \cline{1-1} \end{array}^{(+)} , \boxed{c} > = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & b_1 & b_2 & \ldots & b_l & c & p^{l+1} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{a_2} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{\ldots} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{a_k} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{q^{k-1}} \\ \cline{1-1} \end{array}^{(-)} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & b_1 & b_2 & \ldots & b_l & p^l \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{a_2} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{\ldots} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{a_k} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{c} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{q^k} \\ \cline{1-1} \end{array}^{(+)}$$

Дәлел. Мутация $\langle\cdot,\cdot\rangle$ көбейтіндісінің анықтамасы бойынша біз жоғарыдағы теңдіктің сол жақ бөлігін ашып, бикоммутатив алгебрасының тепе-теңдіктерін қолданып келесі теңдікті аламыз:

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & b_1 & b_2 & \ldots & b_l & p^l \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{a_2} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{\ldots} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{a_k} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{q^{k-1}} \\ \cline{1-1} \end{array} p)c - c(q \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & b_1 & b_2 & \ldots & b_l & p^l \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{a_2} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{\ldots} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{a_k} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{q^{k-1}} \\ \cline{1-1} \end{array} \right)$$

$$+\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline b_1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_k & p^{k-1} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{b_2} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{\ldots} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{b_l} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{q^l} \\ \cline{1-1} \end{array} p)c - c(q \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline b_1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_k & p^{k-1} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{b_2} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{\ldots} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{b_l} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{q^l} \\ \cline{1-1} \end{array} \right)$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & b_1 & b_2 & \ldots & b_l & c & p^{l+1} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{a_2} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{\ldots} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{a_k} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{q^{k-1}} \\ \cline{1-1} \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & b_1 & b_2 & \ldots & b_l & p^l \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{a_2} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{\ldots} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{a_k} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{c} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{q^k} \\ \cline{1-1} \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline b_1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_k & c & p^k \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{b_2} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{\ldots} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{b_l} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{q^l} \\ \cline{1-1} \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline b_1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_k & p^{k-1} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{b_2} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{\ldots} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{b_l} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{c} \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{q^{l+1}} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

мұндағы $k + l = n$.

$\sqcap$

Енді, бұл жұмыстың негізгі нәтижесін дәлелдейміз.

Теорема 2.3. *Егер n тақ болса, онда*

$$\langle\langle \dots \langle\langle a_1, a_2\rangle, a_3\rangle \dots\rangle, a_n\rangle =$$

$$\begin{ytableau} a_1 & a_2 & \dots & a_n & p^{n-1} \end{ytableau}^{(+)} - \sum \begin{ytableau} a_1 & a_2 & \dots & a_n & p^{n-2} \\ a_i \\ q \end{ytableau}^{(+)} + \dots +$$

$$+\sum \begin{ytableau} a_1 & a_2 & a_i & p & p \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \\ q^{n-3} \end{ytableau}^{(+)} - \begin{ytableau} a_1 & a_2 & p \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \\ q^{n-2} \end{ytableau}^{(+)} .$$

Егер n жұп болса, онда

$$\langle\langle \dots \langle\langle a_1, a_2\rangle, a_3\rangle \dots\rangle, a_n\rangle =$$

$$\begin{ytableau} a_1 & a_2 & \dots & a_n & p^{n-1} \end{ytableau}^{(-)} - \sum \begin{ytableau} a_1 & a_2 & \dots & a_n & p^{n-2} \\ a_i \\ q \end{ytableau}^{(-)} + \dots -$$

$$-\sum \begin{ytableau} a_1 & a_2 & a_i & p & p \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \\ q^{n-3} \end{ytableau}^{(-)} + \begin{ytableau} a_1 & a_2 & p \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \\ q^{n-2} \end{ytableau}^{(-)} .$$

Дәлел. Жоғарыда келтірілген формулалар $k < n$ үшін дұрыс деп есептейік. Сонда, $k = n - 1$. Мұндағы, $n - 1$ жұп, ал, n тақ болсын

$$\Big\langle \big\langle \dots \langle \langle a_1, a_2 \rangle, a_3 \rangle \dots, a_{n-1} \big\rangle, a_n \Big\rangle =$$

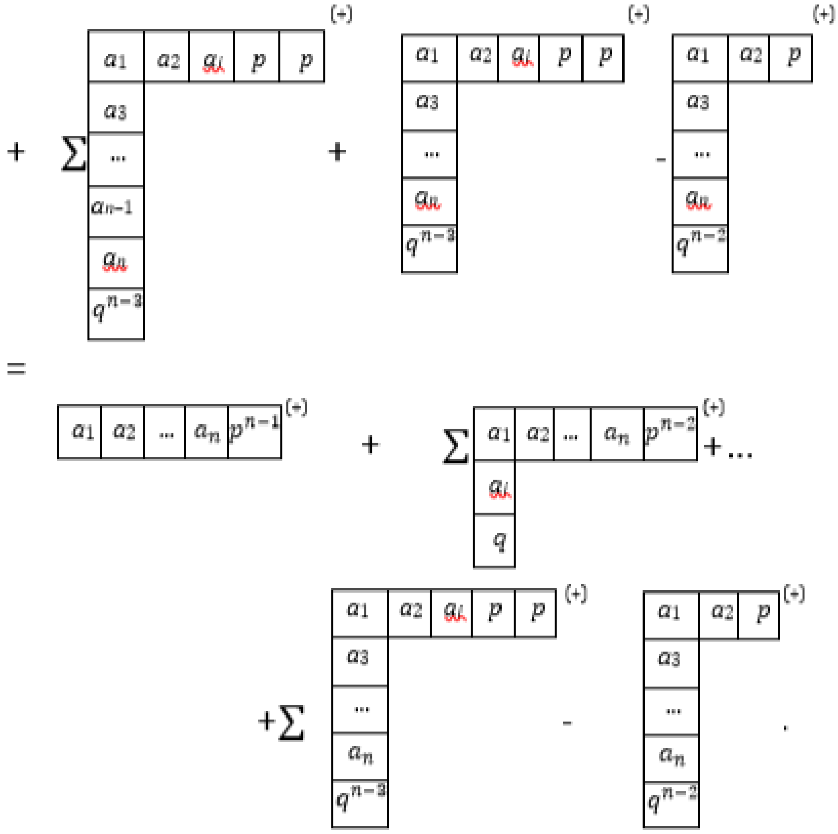
$$< \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & p^{n-2} \\ \hline \end{array}^{(+)} - \sum \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & p^{n-3} \\ \hline a_i \\ \cline{1-1} q \\ \cline{1-1} \end{array}^{(+)} + \dots -$$

$$-\sum \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & a_i & p & p \\ \hline a_3 \\ \cline{1-1} \dots \\ \cline{1-1} a_{n-1} \\ \cline{1-1} q^{n-4} \\ \cline{1-1} \end{array}^{(+)} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & p \\ \hline a_3 \\ \cline{1-1} \dots \\ \cline{1-1} a_{n-1} \\ \cline{1-1} q^{n-3} \\ \cline{1-1} \end{array}^{(+)} , a_n >$$

Лемма 2.1 және *2.2* арқылы:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n & p^{n-1} \\ \hline \end{array}^{(+)} - \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a_1 & \dots & a_{n-1} & p^{n-2} \\ \hline a_n \\ \cline{1-1} q \\ \cline{1-1} \end{array}^{(+)} - \sum \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n & p^{n-2} \\ \hline a_i \\ \cline{1-1} q \\ \cline{1-1} \end{array}^{(+)}$$

$$+\sum \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & p^{n-3} \\ \hline a_i \\ \cline{1-1} a_n \\ \cline{1-1} q \\ \cline{1-1} q \\ \cline{1-1} \end{array}^{(+)} + \dots - \sum \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & a_i & a_n & p & p & p \\ \hline a_3 \\ \cline{1-1} \dots \\ \cline{1-1} a_{n-1} \\ \cline{1-1} q^{n-4} \\ \cline{1-1} \end{array}^{(+)} +$$



Теореманың екінші бөлігінде Лемма 2.1 және Лемма 2.2 қолдану арқылы алуға болады.

Теорема 2.4. Әрбір бикоммутативті алгебра

$$\langle\langle a,b\rangle,c\rangle-\langle\langle a,c\rangle,b\rangle+\langle b,\langle c,a\rangle\rangle-\langle c,\langle b,a\rangle\rangle=0,$$

теңдігін қанағаттандырады, мұндағы $\langle a,b\rangle=(ap)b-b(qa)$.

Дәлел. Теорема 2.3. және сол-коммутативтілік пен оң-коммутативтілік бойынша келесі элементтердің қосындысы бізге қажетті нәтижені береді:

$\langle\langle a,b\rangle,c\rangle=\Big(\big((ab)c\big)p\Big)p-q\Big(\big((ba)c\big)p\Big)-q\Big(c\big((ab)p\big)\Big)+q\Big(q\big(c(ba)\big)\Big),$

$-\langle\langle a,c\rangle,b\rangle=-\Big(\big((ab)c\big)p\Big)p+q\Big(\big((ca)b\big)p\Big)+q\Big(b\big((ac)p\big)\Big)-$
$q\Big(q\big(c(ba)\big)\Big),$

$$\langle b,\langle c,a\rangle\rangle = c\left(((ba)p)p\right) - q\left(b((ac)p)\right) - q\left(((ca)b)p\right) + q\left(q((ab)c)\right),$$

$$-\langle c,\langle b,a\rangle\rangle = -c\left(((ba)p)p\right) + q\left(c((ab)p)\right) + q\left(((ba)c)p\right) -$$
$$q\left(q((ab)c)\right).$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1 Dzhumadil'daev A. S., Tulenbaev K. M. Bicommutative algebras (Russian), Usp. Mat. Nauk, 58(6) (2003), 149-150. English translation: Russ. Math. Surv. 58(6) (2003), 1196-1197.

2 Dzhumadil'daev A. S. , Ismailov N. A., Tulenbaev K.M. Free bicommutative algebras, Serdica Mathematical journal 37, 2011. 25–44.

3 Burde D., Karel D., Sandra D. LR-algebras. Contemporary Mathematics 491, 2009. 125.

4 Montaner F.. Identities in mutations of associative algebras. Communications in Algebra 20(1), 1992. 55–67.

5 Myung, H. C. A Malcev-admissible mutation of an alternative algebra. Bull. Korean Math. Sot.,vol. 20, 37-43 (1983).

6 Boers A. H. Mutation algebras of a nonassociative algebra. Indagationes Mathematicae 6.(1), 1995. 25-33.

7 Bremner M. R., Brox J. and Sanchez-Ortega J. Higher polynomial identities for mutations of associative algebras. Results in Mathematics, 78(6), 2023. p.237.

8 Dzhumadil'daev A. S. , Ismailov N. A. Polynomial Identities of bicommutative algebras, Rings and Algebras, Communications in Algebra 46.(12), 2018. 5241-5251.

Farukh Mashurov[1], Madina Ostemirova[2]

[1,2]SDU University, Қаскелең, Қазақстан

*e-mail: 221101010@stu.sdu.edu.kz

IDENTITIES IN MUTATIONS OF BICOMMUTATIVE ALGEBRAS

Abstract. The algebra B=(B,·) is called bicommutative if for each element a, b,c қанағаттандыр B satisfies the following equilibrium:

a·(b·c)=b·(a·c),

(a·b)·c=(a·c)·b.

In this work, we study bicommutative Algebra by the product of mutations and prove that any bicommutative Algebra by the product of mutations satisfies the equilibrium of the third degree.

Keywords: mutation, Lie-admissible, polynomial balances.

Машуров Фарух[1], *Өстемирова Мадина*[2]
[1,2]SDU University, Каскелен, Казахстан
*e-mail: 221101010@stu.sdu.edu.kz

БИКОММУТАТИВТ АЛГЕБРА МУТАЛАРЫНДАҒЫ ТЕПЕ-ТЕҢДІКТЕР

Абстракт. Алгебра B=(B,·) называется бикоммутативной, если она удовлетворяет следующим балансам для каждого элемента a,b,c ∈ B:

$$a\cdot(b\cdot c)=b\cdot(a\cdot c),$$

$$(a\cdot б)\cdot c=(a\cdot c)\cdot б.$$

В этой работе мы изучаем бикоммутативную алгебру относительно произведения мутации и доказываем, что любая бикоммутативная алгебра относительно произведения мутации удовлетворяет балансу третьей степени.

Ключевые слова: мутация, лиевская допустимость, полиномиальные равновесия.

Келіп түсті 30 Сәуір 2024