IRSTI 27.17

Алмат. Әбдрашит[1], Фарух Машуров[2]*
[1,2]«SDU University», Қаскелең, Қазақстан
*e-mail:almat.abdrashit@sdu.edu.kz,
farukh.mashurov@sdu.edu.kz

АССОЦИАТИВТІ ЕМЕС АЛГЕБРАЛАРДЫҢ МУТАЦИЯСЫ

Аңдатпа. Біз бұл жұмыста бикоммутативті алгебраны мутация көбейтіндісі бойынша қарастырамыз. Біз мутация көбейтіндісі бойынша кез-келген бикоммутативті алгебраның үшінші дәрежедегі барлық тепе-теңдіктерін көрсеттік. Оған қоса, біз үшінші дәрежелі барлық тепе-теңдіктер екі тәуелсіз тепе-теңдіктерінің салдары екенін көрсеттік.

Түйін сөздер: Мутация, бикоммутативті алгебра, ассоциативті емес алгебра.

Кіріспе.

Ең алғаш мутация көбейтіндісі ассоциативті алгебраларда қарастырылған [8]. Мутация көбейтіндісі теориялық физикада 1980 жылдары пайда болған [4], [5]. Ең алғаш болып, Ф. Монтанер ассоциативті алгебралардың мутациялары қанағаттандыратын тепе-теңдіктерін зерттеген [8]. Ассоциативті емес алгебралардың мутациялары келесі жұмыста қарастырылған [6]. А. Эльдюк және бірлескен авторлары мутация алгебраларының құрылымдық теориясын жан-жақты түсіндірген [7]. **А**лгебраның бекітілген p және q элементтері үшін алгебрадағы мутация көбейтіндісі келесідей анықталады:

$$\langle a,b\rangle = (ap)b-(bq)a.$$

Ал, $B_{p,q} = (B,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ алгебрасы берілген B алгебрасының мутациясы деп аталады.

Біз бұл жұмыста ассоциативті емес алгебраларын мутация көбейтіндісімен зерттеуді жалғастырамыз. Келесі тепе-теңдіктерді қанағаттандыратын B алгебрасы

$$a(bc) = b(ac),$$
$$(ab)c = (ac)b$$

бикоммутативті алгебра деп аталады [1], [2]. Әріптестерімен бірлесіп жазылған жұмыста Д. Бурде бикоммутативті алгебраларды LR алгебралары деп те атайды [3]. А. Жұмаділдаев, Н. Исмаилов және Қ. Туленбаев еркін бикоммутативті алгебралардың базисын тапқан [2].

Кейінірек, А. Жұмаділдаев пен Н. Исмаилов бикоммутативті алгебраларын коммутатор көбейтіндісінде қарастырған [1]. Егер $p=\emptyset, q=\emptyset$ болса, онда мутация көбейтіндісі коммутатор көбейтіндісіне айналады, яғни:

$$\langle a,b\rangle = ab-ba=[a,b] \text{ (коммутатор).}$$

Бикоммутативті алгебралардың класын $Bicom$ арқылы белгілейік. Бекітілген $p,q\in B$ үшін бикоммутативті алгебралар мутацияларының класы $Bicom_{p,q}$ болсын. Яғни, $Bicom_{p,q}$ элементтері $B_{p,q}$ түріндегі алгебралар болып табылады, мұндағы $B\in Bicom$.

Бұл жұмыстың мақсаты $Bicom_{p,q}$ үшін тепе-теңдіктерді табу болып табылады. Біз мутация көбейтіндісі бойынша кез-келген бикоммутативті алгебраның үшінші дәрежедегі барлық тепе-теңдіктерін көрсеттік. Оған қоса, біз үшінші дәрежелі барлық тепе-теңдіктер екі тәуелсіз тепе-теңдіктерінің салдары екенін көрсеттік.

Барлық алгебралар характеристикасы 0 болатын өрісте қарастырылады.

Негізгі нәтиже.

Келесі көпмүшелілерді төмендегідей белгілеп алайық:

$$f_1(a,b,c)=\langle\langle b,a\rangle,c\rangle-\langle\langle b,c\rangle,a\rangle-\langle c,\langle a,b\rangle\rangle+\langle a,\langle c,b\rangle\rangle,$$

$$f_2(a,b,c)=\langle\langle a,b\rangle,c\rangle+\langle\langle c,a\rangle,b\rangle-\langle\langle b,a\rangle,c\rangle-\langle\langle a,c\rangle,b\rangle-\langle\langle c,b\rangle,a\rangle+\langle\langle b,c\rangle,a\rangle,$$

$$f_3(a,b,c)=\langle\langle c,a\rangle,b\rangle-\langle\langle b,a\rangle,c\rangle-\langle\langle c,b\rangle,a\rangle+\langle\langle b,c\rangle,a\rangle-\langle b,\langle c,a\rangle\rangle+\langle c,\langle b,a\rangle\rangle,$$

$$f_4(a,b,c)=\big\langle a,\langle c,b\rangle\big\rangle-\big\langle a,\langle b,c\rangle\big\rangle+\big\langle b,\langle a,c\rangle\big\rangle-\big\langle b,\langle c,a\rangle\big\rangle-\big\langle c,\langle a,b\rangle\big\rangle+\big\langle c,\langle b,a\rangle\big\rangle.$$

Лемма 1. $(B,\ \cdot)$ бикоммутативті алгебра болса, онда $(B,\langle,\rangle)$ келесі $f_1(a,b,c)=0$ тепе-теңдігін қанағаттандырады.

Дәлелдеме.

$$f_1(a,b,c)=\langle\langle b,a\rangle,c\rangle-\langle\langle b,c\rangle,a\rangle-\langle c,\langle a,b\rangle\rangle+\langle a,\langle c,b\rangle\rangle=0$$

екенін дәлелдеу үшін, мутация көбейтіндісінің анықтамасын қолданып, төмендегідей есептеулер жасайық:

$$\langle\langle b,a\rangle,c\rangle = (((ba)c)p)p-(((ab)c)p)q-c(((ba)p)q)+c(((ab)q)q),$$

$$-\langle\langle b,c\rangle,a\rangle = -(((ba)c)p)p+(((ca)b)p)q+b(((ac)p)q)-c(((ab)q)q),$$
$$-\langle c,\langle a,b\rangle\rangle = -c(((ab)p)p)+c(((ba)p)q)+(((ab)c)p)q-(((ba)c)q)q,$$

$$\langle a, \langle c, b\rangle\rangle = c(((ab)p)p) - b(((ac)p)q) - (((ca)b)p)q + (((ba)c)q)q.$$

Жоғарыда жазылған элементтердің қосындысы бізге қажетті нәтижені береді.

□

Енді, біз бикоммутативті алгебраның мутация көбейтіндісінде $f_1(a,b,c) = 0$ тепе-теңдігінен басқа, қосымша тепе-теңдіктерді қанағаттандыратынын дәлелдейміз.

Лемма 2. $(B, \ \cdot)$ бикоммутативті алгебра болса, онда $(B, \langle , \rangle)$ келесі $f_2(a,b,c) = 0$, $f_3(a,b,c) = 0$ және $f_4(a,b,c) = 0$ тепе-теңдіктерін қанағаттандырады.

Дәлелдеме. Бірінші, біз $f_2\ (a,b,c) = 0$ екенін дәлелдейміз. Яғни,

$$\langle\langle a,b\rangle,c\rangle + \langle\langle c,a\rangle,b\rangle - \langle\langle b,a\rangle,c\rangle - \langle\langle a,c\rangle,b\rangle - \langle\langle c,b\rangle,a\rangle + \langle\langle b,c\rangle,a\rangle = 0.$$

Мутация көбейтіндісінің анықтамасын қолданып, төмендегідей есептеулер жасайық:

$$\langle\langle a,b\rangle,c\rangle = (((ab)c)p)p - (((ba)c)p)q - c(((ab)p)q) + c(((ba)q)q),$$

$$\langle\langle c,a\rangle,b\rangle = (((ca)b)p)p - (((ab)c)p)q - c(((ba)p)q) + b(((ac)q)q),$$

$$-\langle\langle b,a\rangle,c\rangle = -(((ba)c)p)p + (((ab)c)p)q + c(((ba)p)q) - c(((ab)q)q),$$

$$-\langle\langle a,c\rangle,b\rangle = -(((ab)c)p)p + (((ca)b)p)q + b(((ac)p)q) - c(((ba)q)q),$$

$$-\langle\langle c,b\rangle,a\rangle = -(((ab)c)p)p + (((ca)b)p)q + b(((ac)p)q) - c(((ba)q)q),$$

$$\langle\langle b,c\rangle,a\rangle = (((ba)c)p)p - (((ca)b)p)q - b(((ac)p)q) + c(((ab)q)q).$$

Жоғарыда жазылған элементтердің қосындысы бізге қажетті нәтижені береді. Енді, біз төмендегі тепе-теңдіктің орындалатынын дәлелдейміз.

$$f_3(a,b,c) = \langle\langle c,a\rangle,b\rangle - \langle\langle b,a\rangle,c\rangle - \langle\langle c,b\rangle,a\rangle + \langle\langle b,c\rangle,a\rangle - \langle b,\langle c,a\rangle\rangle \\ + \langle c,\langle b,a\rangle\rangle = 0.$$

Тікелей есептеулер арқылы,

$$\langle\langle c,a\rangle,b\rangle = (((ca)b)p)p - (((ab)c)p)q - c(((ba)p)q) + b(((ac)q)q),$$

$$-\langle\langle b,a\rangle,c\rangle = -(((ba)c)p)p + (((ab)c)p)q + c(((ba)p)q) - c(((ab)q)q),$$

$$-\langle\langle c,b\rangle,a\rangle = -(((ab)c)p)p + (((ca)b)p)q + b(((ac)p)q) - c(((ba)q)q),$$

$$\langle\langle b,c\rangle,a\rangle = (((ba)c)p)p - (((ca)b)p)q - b(((ac)p)q) + c(((ab)q)q),$$

$$-\langle b,\langle c,a\rangle\rangle = -c(((ba)p)p) + b(((ac)p)q) + (((ca)b)p)q - (((ab)c)q)q,$$

$$\langle c,\langle b,a\rangle\rangle = c(((ba)p)p) - c(((ab)p)q) - (((ba)c)p)q + (((ab)c)q)q$$

екені шығады және жоғарыда жазылған элементтердің қосындысы бізге қажетті нәтижені береді.

Енді,

$$f_4(a,b,c) = \langle a,\langle c,b\rangle\rangle - \langle a,\langle b,c\rangle\rangle + \langle b,\langle a,c\rangle\rangle - \langle b,\langle c,a\rangle\rangle - \langle c,\langle a,b\rangle\rangle + \langle c,\langle b,a\rangle\rangle = 0$$

екенін дәлелдеу үшін тікелей есептеулер жасайық:

$$\langle a,\langle c,b\rangle\rangle = c(((ab)p)p) - b(((ac)p)q) - (((ca)b)p)q + (((ba)c)q)q,$$

$$-\langle a,\langle b,c\rangle\rangle = -b(((ac)p)p) + c(((ab)p)q) + (((ba)c)p)q - (((ca)b)q)q,$$

$$\langle b,\langle a,c\rangle\rangle = b(((ac)p)p) - c(((ba)p)q) - (((ab)c)p)q + (((ca)b)q)q,$$

$$-\langle b,\langle c,a\rangle\rangle = -c(((ba)p)p) + b(((ac)p)q) + (((ca)b)p)q - (((ab)c)q)q,$$

$$-\langle c,\langle a,b\rangle\rangle = -c(((ab)p)p) + c(((ba)p)q) + (((ab)c)p)q - (((ba)c)q)q,$$

$$\langle c,\langle b,a\rangle\rangle = c(((ba)p)p) - c(((ab)p)q) - (((ba)c)p)q + (((ab)c)q)q.$$

Жоғарыда жазылған элементтердің қосындысы бізге қажетті нәтижені береді.

□

Лемма 3. $f_1(a,b,c) = 0$ және $f_3(a,b,c) = 0$ тепе-теңдіктерінен $f_2(a,b,c) = 0$ және $f_4(a,b,c) = 0$ тепе-теңдіктері шығады.

Дәлелдеме. Үшінші дәрежелі 12 ассоциативті емес бірмүшелілерді мынадай реттілікпен жазып шығайық:

$$\{\langle\langle a,b\rangle,c\rangle,\langle\langle a,c\rangle,b\rangle,\langle\langle b,a\rangle,c\rangle,\langle\langle b,c\rangle,a\rangle,\langle\langle c,a\rangle,b\rangle,\langle\langle c,b\rangle,a\rangle,$$
$$\langle a,\langle b,c\rangle\rangle,\langle a,\langle c,b\rangle\rangle,\langle b,\langle a,c\rangle\rangle,\langle b,\langle c,a\rangle\rangle,\langle c,\langle a,b\rangle\rangle,\langle c,\langle b,a\rangle\rangle\}.$$

Жоғарыда жазылған бірмүшелілердің реттілігіне қатысты олардың коэффициенттерін аламыз. Басқаша айтқанда, матрицаның бағандары бірмүшелілермен сәйкес келсе, ал қатарлары $f_1(a,b,c)$ және $f_3(a,b,c)$ тепе-теңдіктерінің барлық мүмкін болатын алмастыруларымен бірге әрбір көпмүшеліні береді.

Сонда, бізде алғашқы 6 қатары $f_1(a,b,c)$ тепе-теңдігінің және одан кейінгі 6 қатары $f_3(a,b,c)$ тепе-теңдігінің барлық алмастыруларынан пайда болатын келесі матрица шығады:

$$A_{f_1,f_3} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Біз, бұл жерде $rank\left(A_{f_1,f_3}\right) = 4$ екенін көреміз. Енді, біз алдыңғы матрицадағыдай бағандарын өзгертпей, (18 x 12) өлшемді матрицаны құраймыз. Ал, матрицаның қатарлары f_1, f_3, f_2 тепе-теңдіктерінің барлық мүмкін болатын алмастыруларынан туындайтын әрбір көпмүшені береді.

$$A_{f_1,f_3,f_2} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Біз, бұл жерде $rank\left(A_{f_1,f_3,f_2}\right) = 4$ екенін көреміз. Демек, f_2 тепе-теңдігі f_1

және f_3 тепе-теңдіктерінен шығады. Матрицаның бағандарын жоғарыдағыдай өзгертпей жазып, қатарларын f_1, f_3, f_4 тепе-теңдіктерінің барлық мүмкін болатын пермутациясынан туындайтын әрбір көпмүшені жазамыз.

$$A_{f_1,f_3,f_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rank\left(A_{f_1,f_3,f_4}\right) = 4$. Демек, f_2 және f_4 тепе-теңдіктері f_1 және f_3 тепе-теңдіктерінен шығады.

□

Келесі көпмүшені анықтап алайық,

$$L(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} sgn(\sigma)\left(\langle\langle x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}\rangle, x_{\sigma(3)}\rangle - \langle x_{\sigma(1)}, \langle x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}\rangle\rangle\right).$$

Теорема 1. Кез-келген бикоммутативті алгебра мутация көбейтіндісінде келесі $L(a, b, c) = 0$ тепе-теңдікті қанағаттандырады.

Дәлелдеме.
$f_2(a, b, c) = 0$ және $f_4(a, b, c) = 0$ болғандықтан, бізде $L(a, b, c) = 0$ болады.

□

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. A.S. Dzhumadil'daev, N.A. Ismailov, Polynomial Identities of Bicommutative Algebras, Rings and Algebras (math.RA), Submitted on 12 Nov 2017, https://arxiv.org/abs/1711.04300.

2. A. S. Dzhumadil'daev, N. A. Ismailov, K. M. Tulenbaev, Free Bicommutative Algebras, Serdica Mathematical journal, 2011, Bulgary Academy of Sciences Institute of Mathematics and Informatics, http://www.math.bas.bg/ serdica/2011/2011-025-044.pdf.
3. Burde, Dietrich, Karel Dekimpe, and Sandra Deschamps. LR-algebras. Contemporary Mathematics 491 (2009): 125, https://arxiv.org/pdf/0801.1280.
4. Ktorides, Christos N., Hyo Chul Myung, and Ruggero Maria Santilli. "Elaboration of the recently proposed test of Pauli's principle under strong interactions." Physical Review D 22.4 (1980): 892.
5. Santilli, Ruggero Maria. "An intriguing legacy of Einstein, Fermi, Jordan, and others: The possible invalidation of quark conjectures." Foundations of Physics 11.5 (1981): 383-472.
6. Myung, H. C., and A. A. Sagle. "On Lie-admissible mutations of associative algebras." Hadronic Journal 10.1 (1987): 35-51.
7. Elduque, Alberto, et al. Mutations of alternative algebras. Springer Netherlands, 1994.
8. F. Montaner: Identities in mutations of associative algebras. Comm. Algebra 20 (1992), no. 1, 55–67.

Almat Abdrashit[1], *Farukh Mashurov*[2]
[1,2]«SDU University», Kaskelen, Kazakhstan
*e-mail: almat.abdrashit@sdu.edu.kz, farukh.mashurov@sdu.edu.kz

MUTATION OF NONASSOCIATIVE ALGEBRAS

Abstract. We consider bicommutative algebras under mutation products. We obtain all identities of degree three of any bicommutative algebra under mutation product. Moreover, we prove that all identities in degree three are consequences of two independent identities.

Keywords: Mutation, bicommutative algebra, nonassociative algebra.

Алмат Абдрашит[1], *ФарухМашуров*[2]
[1,2]«SDU University», Каскелен, Казахстан
*e-mail almat.abdrashit@sdu.edu.kz, farukh.mashurov@sdu.edu.kz

МУТАЦИЯ НЕАССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

Аннотация. Мы рассматриваем бикоммутативные алгебры относительно произведений мутаций. Мы показали все тождества третьей степени любой бикоммутативной алгебры по произведению мутаций.

Кроме того, мы показали, что все тождества третьего порядка являются следствием двух независимых тождеств.

Ключевые слова: Мутация, бикоммутативная алгебра, неассоциативная алгебра.

Келіп түсті 08 Мамыр 2024