МРНТИ 27.35.45

Д. Касабек[1], С. Касабек[2], А. Жайлаубек[3], М. Төлеубек[4]
[1,2,3,4]Astana IT University, Нур-Султан, Казахстан

ТЕПЛОВЫЕ ПОЛИНОМЫ ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Аннотация. Изучения процессов в области контактной техники имеют важную роль во всем мире. Данная статья рассматривает математическую модель замкнутых контактных элементов при нагреве. При нагреве электрического контакта происходят много теплофизических процессов. Задача Стефана является математической моделью процесса с изменением фазы, где тепло либо поглащается, либо выделяется. К примеру, затвердевание металлов, замерзание грунта и воды, таяние льда, рост кристаллов и т.д. Есть два вида задачи Стефана, прямая и обратная. В первом, цель задачи найти распределение температуры по контактному элементу и нахождение положении подвижных границ. В последнем же, предпологая, что подвижные границы известны, составить функцию теплового потока, определяющую распределение температуры. Данная работа дает приближенное решение методом тепловых полиномов.

Ключевые слова: Обратная задача Стефана, тепловой полином, функция теплового потока.

***

Аңдатпа. Байланыс техникасы саласындағы процестерді зерттеу бүкіл әлемде маңызды рөл атқарады. Бұл мақалада қыздыру кезінде жабық байланыс элементтерінің математикалық моделі қарастырылады. Электрлік байланыс қызған кезде көптеген термофизикалық процестер жүреді. Стефан есебінің мақсаты-жылу сіңірілетін немесе шығарылатын фазаның өзгеруімен болатын процестің математикалық моделін құру. Мысалы, металдардың қатаюы, топырақ пен судың қатуы, мұздың еруі, кристалдардың өсуі және т.б. Стефан есебінің екі түрі бар, тікелей және кері. Бірінші түрінде негізгі мақсат - байланыс элементі бойынша температураның таралуын табу және жылжымалы шекаралардың орнын табу. Соңғысында, жылжымалы шекаралар белгілі деп есептей отырып, температураның таралуын анықтайтын жылу ағынының функциясын құру болып табылады. Бұл жұмыс жылу көпмүшелері әдісімен негізгі шешімге жақын шешім береді.

Түйін сөздер: Кері Стефан есебі, жылулық көпмүшелері, жылулық ағынының функциясы.

***

Abstract. The study of processes in the field of contact technology has an important role all over the world. This article considers a mathematical model of closed contact elements during heating. When an electrical contact is heated, many thermophysical processes occur. The Stefan problem is a mathematical model of a process with a phase change, where heat is either absorbed or released. For example, the solidification of metals, the freezing of soil and water, the melting of ice, the growth of crystals, etc. There are two types of Stefan's problem, direct and inverse. In the first, the goal of the task is to find the temperature distribution over the contact element and find the position of the movable boundaries. In the latter case, assuming that the moving boundaries are known, we can create a heat flow function that determines the temperature distribution. This work gives an approximate solution by the method of heat polynomials.

Keywords: Inverse Stefan problems, heat polynomials, heat flux function.

Вступление

Задача Стефана включает в себя проблемы теплопередачи в областях с подвижными границами, связанные с изменением фазы, которые возникают при исследовании процессов плавления и сварки, а также процессов охлаждениях [6,10,14]. В теории параболических уравнений, задача Стефана считается нелинейной, где помимо искомых решений необходимо найти незвестную подвижную границу. В обратной задачи Стефана [3], где свободная граница известна, требуется находить температуру и предполагаемый тепловой поток на граничных условиях.

Метод тепловых потенциалов является одним из эффективных методов в решениях задач диффузии, который сводит краевые задачи к интегральным уравнениям. Тем не менее, могут возникнуть дополнительные трудности с сингулярностью интегральных уравнений, в случае если области вырождены в начальный момент времени.

К примеру, метод интегральный теплового баланса [11,15,19], теория возмущений [1,20,21], и другие методы широко используются в решениях задач Стефана со свободными границами, где описывается теплообмен с фазовыми переходами. Также есть множество решений в многомерных случаях [5,7,21].

В данной статье рассматривается двухмерная обратная цилиндрическая задача Стефана. Решение данной задачи представлена в аналитической форме на основании полиномов Лагерра. Данный метод позволяет находить аналитическое и приближенное решение задачи Стефана с искомой степенью точности и оценить погрешность приблежения, используя принцип максимума. Этот подход был успешно применен для решения одномерных и одно - и двухфазных задач Стефана [8,16,17]. Основной проблемой является оценивание погрешности аппроксимации, которая, как правило, заменяется для прикладных задач сопоставлением аналитического решения с экспериментальными данными. В этом направлении был получен ряд интересных результатов для решения классических задач теплопередачи [2,4,12]. Во втором разделе мы приводим некоторые свойства о тепловых полиномах. Основные результаты данной работы приведены в третьем разделе, а также краткое заключение обсуждаются в последнем разделе.

Основная часть

1. Тепловые полиномы

Тепловые полиномы, введенные в рассмотрение Розенблумом и Виддером [13], можно рассматривать как основные функции для построения решения уравнения теплопроводности в виде их линейной комбинации. Тепловые полиномы могут быть определены с помощью интегральных функции ошибок.

$$i^n \operatorname{erfc}(x) = \int_x^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc}(v) dv, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$i^0 \operatorname{erfc}(x) \equiv \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-v^2\right) dv$$

где функция

$$u_n(\pm x, t) = t^{\frac{n}{2}} i^n erfc\left(\frac{\pm x}{2a\sqrt{t}}\right) \tag{1}$$

удовлетворяет уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Тепловые полиномы были введены Харином [8] в решениях уравнении теплопроводности со стороны интегральных функции ошибок. Сравнивая формулы ниже:

$$v_{2k}(x,t) = (2\sqrt{t})^{2k}\left[i^{2k} erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + i^{2k} erfc\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right],$$
$$v_{2k+1}(x,t) = (2\sqrt{t})^{2k+1}\left[i^{2k+1} erfc\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - i^{2k+1} erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right],$$

мы приходим к выводу, что полиномы

$$v_{2k}(x,t)=\sum_{m=0}^{k}\frac{x^{2(k-m)}t^k}{2^{2m-1}m!(2k-2m)!},$$
$$v_{2k+1}(x,t)=\sum_{m=0}^{k}\frac{x^{2(k-m)+1}t^k}{2^{2m-1}m!(2k-2m+1)!},$$

удовлетворяют уравнение (2). Многие краевые задачи для уравнения теплопроводности (2) могут быть решены с помощью представления решения в таком виде

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n v_n(x,t),$$

где неизвестные коэффиценты A_n определяются из начальных и граничных условий. Сходимость рядов показана в [13].

Для обобщенных радиальных уравнений теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{v}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}$$

явный вид тепловых полиномов может быть задан формулой

$$R_{n,v}(r,t)=\sum_{k=0}^{n}2^{2k}\frac{n!\Gamma(\frac{v-1}{2}+1+n)}{k!(n-k)!\Gamma(\frac{v-1}{2}+1+n-k)}r^{2n-2k}t^k.$$

Очевидно, что данный подход может быть распространен на двумерное уравнение теплопроводности. Для получения производящей функции для цилиндрических многочленов, удовлетворяющих уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}, \tag{3}$$

рассмотрим порождающую функцию в виде

$$g_c(r,z,t,u)=g_1(z,t,u)\,R_{2n,1}(r,t)=e^{uz+tu^2}(4t)^n\,L_n\left(-\frac{r^2}{4t}\right),$$

где L_n (·) где L_n - полином Лагерра. Главное решение задачи выражается уравнением (3) в виде рядов

$$\theta(r,z,t)=\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} v_m(z,t) R_{2n,1}(r,t),$$

где

$$v_m(z,t)=\sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{m!}{k!(m-2k)!} z^{m-2k} t^k \quad \text{and} \quad R_{2n,1}(r,t)=(4t)^{2n} L_{2n}\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$$

являются тепловыми полиномами уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial v_m}{\partial t}=\frac{\partial^2 v_m}{\partial z^2} \text{ and } \frac{\partial R_{2n,1}}{\partial t}=\frac{\partial^2 R_{2n,1}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial R_{2n,1}}{\partial r}$$

Похожие результаты можем получить,если пораждаящая функция дается в таком виде:

$$g_c(r,z,t,u)=e^{uz+3tu^2} I_0(\sqrt{2}ur),$$

где I_0- модифицированная фукнция Бессела первого типа с нулевым порядком. Иногда удобнее рассмотреть другую форму решения, заменив (4) формулой:

$$\theta(r,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n q_n(r,z,t),$$

где

$$q_n(r,z,t)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}-k\right]} \alpha_{k,m}^{(n)} z^{n-2k-2m} r^{2m} t^k, \tag{4}$$

и

$$\alpha_{k,m}^{(n)}=\frac{n!3^k 2^{-m}}{k!(n-2k-2m)!(m!)^2}.$$

2. *Обратная цилиндрическая задача Стефана*

Обратная задача Стефана состоит в том,чтобы определить тепловой поток от электрической дуги P (r, t) и определить температуру расплавленного материала *θ(r, z, t)* в области $0 < r < r_0 + ct$, используя значения ct, полученные в экспериментах. Предполагается, что время горения дуги $0 \le t \le t_{arc}$ и радиус области плавления r_0 известны

При $t = t_{arc}$. Поскольку критерий Фурье $F_0 = \frac{a^2 t}{{r_0}^2}$ больше единицы, почти для всех электрических контактных дуг процесс нагрева является квазистационарным, и все изотермические поверхности, включая изотерму плавления, являются эллипсоидами

$$\frac{r^2}{r_0^2+\xi^2}+\frac{z^2}{\xi^2}=1.$$

В начале времени ξ = 0 полуоси эллипсоида равны r_0 и 0, то есть эллипсоид вырождается в окружность радиуса r . Если мы зададим автомодельный закон движения
изотермы $\xi = \sqrt{ct}$ то уравнение поверхности примет вид

$$\frac{r^2}{r_0^2+ct}+\frac{z^2}{ct}=1$$

или

$$z=h(r,t)=\sqrt{ct}\left(1-\frac{r^2}{r_0^2+ct}\right)^{1/2}.$$

Необходимо решить уравнение теплопроводности для жидкой фазы. Квазистационарная математическая модель, описывающая тепловой контакт на стадии темпера- туры плавления:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2},\quad 0<t<t_{arc},\quad 0<z<h(r,t),\quad 0<r<\alpha(t),$$

при следующих условиях:

$$\theta(r_0,0,0)=\theta_{arc},$$
$$-\lambda\frac{\partial\theta(r,0,t)}{\partial z}=P(r,t),$$

где λ является ли теплопроводностью, r_0 радиус контактного пятна, θ_{arc} температура дуги. Здесь $P(r, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{m,n} r^{2m} t^n$ является тепловым потоком и $p_{m,n}$ являются коэффициентами ряда, который определяется с функцией температуры θ(r, z, t).

На поверхности сопряжения z = h(r, t) условия Стефана таковые:

$$-\lambda\frac{\partial\theta(r,z,t)}{\partial n}\bigg|_{z=h(r,t)}=L\gamma\frac{\partial h(r,t)}{\partial t},$$

$$\theta_{melt}=\theta(r,h(r,t),t).$$

Здесь L - скрытая теплота плавления контактного материала, γ – его плотность, θ_{melt} - температура плавления. Давайте найдем приближенное решение этой задачи, используя тепловые полиномы. В соответствии с этим методом неизвестная температура θ(r,z,t) может быть найдена во временных интервалах (t_{k-1},t_k) по узловым точкам, как это делается в работах [2, 8]. Функция θ^k(r, z, t), которая аппроксимирует температуру, имеет вид

$$\theta^k(r,z,t) = \sum_{n=0}^{N} c_n^k q_n(r,z,t).$$

Коэффиценты c_n^k минимизируют функционал ниже:

$$J^k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\theta^k(r,h(r,t),t) - \theta_{melt}\right)^2 dt +$$
$$+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(-\lambda \frac{\partial\theta^k(r,z,t)}{\partial n}\bigg|_{z=h(r,t)} - L\gamma\frac{\partial h(r,t)}{\partial t}\right)^2 dt,$$

где k = 1,2,... и J^k квадратичная форма коэффицентов c_n^k (n = 0,1,2,...,N). А минимум фунционала J^k определяется дифференцированием функционала по c_n^k.

Решая систему уравнений с коэффицентами A_{mp}^k and B_m^k следующим образом:

$$A_{mp}^k = \int_{t_{k-1}}^{t_z} \left(q_m(r,h(r,t),t)q_p(r,h(r,t),t)\right) dt + \\ + \int_{t_{k-1}}^{t_z} \lambda^2 \left(mq_{m-1}(r,h(r,t),t)pq_{p-1}(r,h(r,t),t)\right) dt, \tag{5}$$

$$B_m^k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\theta_m q_m(r,h(r,t),t) - \lambda L\gamma m\frac{\partial h(r,t)}{\partial t} q_{m-1}(r,h(r,t),t)\right) dt. \tag{6}$$

Из выражения (5) и (6) мы получим следующий результат:

Температура дуги поднимается до значения $T_{arc} = 1.235\cdot10^3$K, $t = 1.8\cdot10^{-3}$, и после снижается.

Аналогичным образом, коэффициенты теплового потока, рассчитанные путем минимизации функционала имеют вид

$$Y^k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(P(r,t) + \lambda\frac{\partial\theta(r,0,t)}{\partial z}\right)^2 dt.$$

Заключение

Наша работа демонстрирует, что с начальным условием θ(r, z, 0) равным нулю, достаточно рассмотреть несколько первых полиномов первого типа (4). Таким образом, мы можем применить данный подход для прямой задачи Стефана. Подвижная граница $z=\sigma(r,t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\sigma_{m\ n}\, r^{m}t^{n}$ определяется из условии Стефана на границах с использованием формулы Фа́а ди Бруно и рекурентных формул.

Список использованной литературы

1 Caldwell, J., Kwan, Y.Y. On the perturbation method for Stefan problem with time-dependent boundary conditions, *Int. J. Heat Mass Transfer,* Vol. 46, (2003): pp. 1497-1501.

2 Futakiewicz, S., Hozejowski, L. Heat polynomials method in solving the direct and inverse heat conduction problems in a cylindrical system of coordinates, Transactions on Engineering Sciences vol. 20, 1998 WIT Press, www.witpress.com, ISSN 1743-3533.

3 Goldman, N.L. Inverse Stefan problem, Kluwer, Dordrecht, (1997).

4 Grysa, K. Heat polynomials and their applications, A Archives of Thermodynamics, vol. 24 (2003) No. 2, pp. 107-124.

5 Grzymkowski R., Stota, D. Multi-phase inverse Stefan problems solved by approximation method, In Parallel Processing and Applied Mathematics, (Edited by R. Wyrzykowski et al.), pp. 679-686, LNCS 2328, Springer, Berlin, (2002).

6 Gupta, S.C. The classical Stefan problem. Basic Concepts, Modeling and Analysis, Elsevier, Amsterdam, (2003).

7 Johansson, B.T., Lesnic D., Reeve, T. A method of fundamental solutions for the two-dimensional inverse Stefan problem, Inverse Problems in Science and Engineering Vol. 19, no. 5 (2011): pp. 659–677.

8 Kharin, S.N. The analytical solution of the two-face Stefan problem with boundary flux condition. *Mathematical Journal,* V 14, no. 1 (51), (2014): pp. 55-76.

9 Kharin, S.N. Mathematical models of phenomena in electrical Contacts. A.P. Ershov Institute of Informatics System The Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, Novosibirsk, (2017).

10 Meirmanov, A.M. The Stefan problem, Walter de Gruyter, Berlin (1992).

11 Mosally, F., Wood, A.S., Al-Fhaid, A. On the convergence of the heat balance integral method, Appl. Math. Modelling, 29 (10), (2005): pp. 903-912.

12 Nasim, C. On generalized heat polynomials, International. J. Math. and Math. Sci. Vol. ii No. 2, (1988): pp. 393-400.

13 Rosenbloom P.C., Widder, D.V. Expansions in terms of heat polynomials and associated functions, Trans. Amer. Math. Soc., 92 (1959): pp. 220-336.

14 Rubinstain, L.I. The Stefan problem, American Mathemagical Society, Providence, RI, (1971).
15 Sadoun, N., Si-Ahmed, E.K., Colinet, P. On the Refined heat balance integral method for the one-Phase Stefan problem with time-dependent boundary conditions, Appl. Math. Modelling, 30 (6), (2006): pp. 531-544.
16 Sarsengeldin, M., Kharin, S.N. Method of the integral error functions for the solution of the one- and two-phase Stefan problems and its application, Filomat journal V. 31:4, (2017): pp. 1017–1029,
17 Sarsengeldin, M.M., Kharin, S.N., Kassabek, S., Mukhambetkazin, Z. Mathematical model of heat transfer in opening electrical contacts, Filomat journal V. 32:3, (2018): pp. 985-990.
18 Slade, P. Electrical contacts. Principles and applications, Second edition. – CRC Press, (2014).
19 Wood, A.S. A new look at the heat balance integral method, Appl. Math. Modelling, 25 (10), (2001): pp. 815-824.
20 Yigit, F. Perturbation solution for solidification of pure metals on a sinusoidal mold surface, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 50, (2007): pp. 2624-2633.
21 Yigit, F. A simplified analytical solution of a two-dimensional Stefan problem with a periodic boundary condition, International Review of Chemical Engineering (IRECHE), Vol 7, no. 6, (2015): pp. 121-129.