ҒТАМР 27.21.17

Ж.Т. Қайыңбаев[1], Д. Төлбасы[2]
[1,2]С. Демирел атындағы университеті, Қаскелең қ., Қазақстан

МЕНЕЛАЙ ТЕОРЕМАСЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

Аңдатпа. Үшбұрыштарға байланысты көптеген есептерді, әсіресе күрделі есептерді шешу барысында, үшбұрыш қабырғаларын ары қарай созу және ол созындыны үшбұрыштың басқа элементтерімен байланыстыру мәселесі туындайды. Осындай жағдайлардағы есептерді шешу үшін қолданылатын маңызды теоремалардың бірі Менелай теоремасы болып табылады. Менелай теоремасының көмегімен үшбұрыштарға байланысы, тіпті кейде төртбұрыштарға да байланысты күрделі есептерді қысқа жолмен шешуге болады. Мақалада осындай жағдайлар әр түрлі нұсқада қарастырылған. Мақала, бүгінгі және болашақ математика пәндері мұғалімдеріне арналған.

Түйін сөздер: үшбұрыш, үшбұрыш қабырғаларын ары қарай созу, үшбұрыш қабырғаларының созындысын үшбұрыштың басқа элементтерімен байланыстыру, Менелай теоремасы, Менелай теоремасының қолданылуы, күрделі геометриялық есептер.

***

Аннотация. При решении многих задач, связанных с треугольниками, особенно сложных, возникает проблема дальнейшего растягивания сторон треугольника и соединения его с другими элементами треугольника. Одной из важнейших теорем, используемых для решения проблем в таких случаях, является теорема Менелая. С помощью теоремы Менелая можно быстро решить сложные задачи, связанные с треугольниками, а иногда и четырехугольниками. В статье рассматриваются такие случаи по-разному и предназначена для учителей современной и будущей математики.

Ключевые слова: треугольник, дальнейшее расширение сторон треугольника, соединение продолжения сторон треугольника с другими элементами треугольника, Теорема Менелая, применение теоремы Менелая, сложные геометрические задачи**.**

***

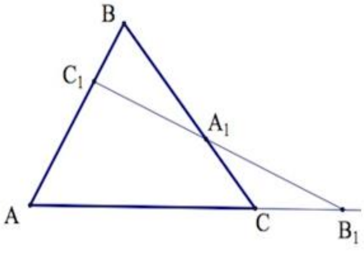
Abstract. When solving many problems related to triangles, especially complex ones, the problem arises of further stretching the sides of the triangle and connecting it with other elements of the triangle. One of the most important theorems used to solve problems in such cases is Menelaus's theorem. With the help of Menelaus' theorem, you can quickly solve complex problems related to triangles and sometimes quadrangles. The article deals with such cases in different ways and is intended for teachers of modern and future mathematics.

Keywords: triangle, further expansion of the sides of the triangle, the connection of the extension of the sides of the triangle with other elements of the triangle, Menelaus' theorem, application of the Menelaus theorem, complex geometric tasks.

Үшбұрыштарға байланысты көптеген есептерді, әсіресе күрделі есептерді шешу барысында, үшбұрыш қабырғаларын ары қарай созу және ол созындыны үшбұрыштың басқа элементтерімен байланыстыру мәселесі туындайды. Осындай жағдайлардағы есептерді шешу үшін қолданылатын маңызды теоремалардың бірі Менелай теоремасы болып табылады. Білім беретін орта мектепте геометрия курсының міндетті мазмұнына бұл теорема, біздің ойымызша, өкінішке орай қазіргі кезде кірмейді. Алайда, бұл мәселені геометрия оқулықтарын, бағдарламаларын дайындайтын мамандар жарқын болашақта терең ойланады және дұрыс тұжырым жасайды деп үміттенеміз.

Жалпы, Менелай теоремасы ежелгі грек математикасының алтын қорына енгізілген теоремалардың бірі. Теорема атауы, осы теореманы ашқан және дәлелдеген, ежелгі грек математигі және астрономы Александрия Менелайдың (б.з. 100 ж.) құрметіне қарай аталған.

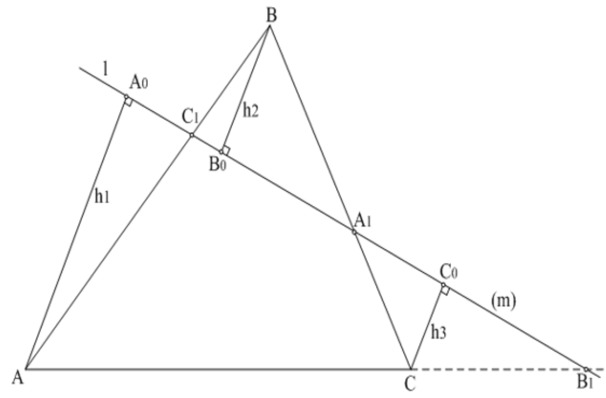
Теорема: ABC үшбұрышының AB, BC және AC қабырғаларының созындыларынан сәйкесінше C_1, A_1 және B_1 нүктелері алынсын және бұл нүктелер үшбұрыштың төбелерімен сәйкес келмесін. A_1, B_1, C_1 нүктелері бір түзудің бойынды жатады сонда тек сонда ғана, егер $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$ теңдігі орындалса.



Сурет 1

Дәлелдеуі. A_1, B_1, C_1 нүктелері бір түзуінде орналасссын және AA_0=h_1, BB_0= h_2, CC_0 = h_3 — A, B және C нүктелерінен 1 түзуіне сәйкесінше түсірілген перпендикулярлар (2 сурет). AA_0C_1 және BB_0C_1 үшбұрыштарының ұқсастығынан келесі қатынасты аламыз:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{h_1}{h_2}.$$



Сурет 2

Сол секілді үшбұрыштың басқа жұптарын ескере отырып, біз келесі қатынастарды аламыз:

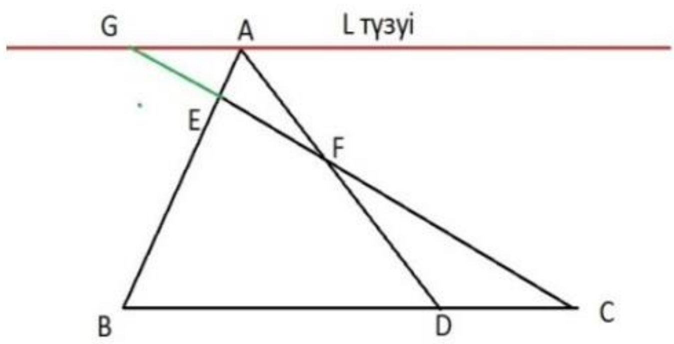
$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{h_2}{h_3}, \qquad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{h_3}{h_1}$$

Алынған қатынастарды көбейтіп, бізге қажетті теңдікке жетеміз.

Теореманың екінші дәлелдемесі.

Меналай теоремасы: $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DF}{FA} = 1.$

L түзуін BC кесіндісіне параллель ретінде аламыз. EC кезіндісін созып L түзуінде G нүктесінде қиылысады (Сурет 3).



Сурет 3

$\angle FGA = \angle$FCD; $\angle$GFA=$\angle$DFC болғандықтан $\Delta GFA \sim \Delta DFC$ және келесі қатынас орнайды:

$$\frac{GA}{DC} = \frac{AF}{FD}.$$

$\angle GAE = \angle$EBC; $\angle$GEA=$\angle$BEC болғандықтан $\Delta GAE \sim \Delta BEC$ және келесі қатынас орнайды:

$$\frac{BC}{GA} = \frac{EB}{AE}.$$

Енді осы қатынастарды бір-біріне көбейтейік:

$$\frac{GA}{DC} \cdot \frac{BC}{GA} = \frac{AF}{FD} \cdot \frac{EB}{AE},$$

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AF}{FD} \cdot \frac{EB}{AE},$$

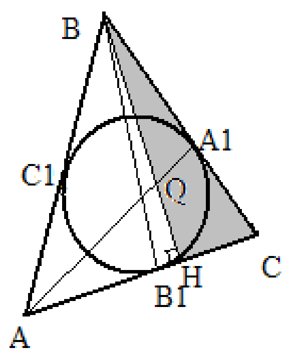
$\frac{BC}{DC}$ қатынасын оң жаққа өткіземіз де, $\frac{AF}{FD} \cdot \frac{DC}{CB} \cdot \frac{BE}{AE} = 1$ теңдігін аламыз.

Тапсырма 1. ABC үшбұрышында іштей шеңбер сызылған. AB =13, BC = 12, AC = 9, A_1 және C_1 - нүктелері сәйкесінше BC және AB қабырғаларында жататын жанасу нүктелері . Q –нүктесі AA_1 және BH, кесіділерінің қиылысу нүктесі , BH- биіктік . BQ:QH. Қатынасын табыңыз (4 сурет).

Берілгені:

AB =13, BC = 12, AC = 9,

BQ:QH=?



Сурет 4

Шешімі:

ABC үшбұрышы әртүрлі қабырғалы, яғни H- нүктесі жанасу нүктесімен сәйкес келмейді. B_1- нүктесімен AC қабырғасының жанасу нүктесін белгілейік.

1. $C_1B = x$ болсын, содан кейін, бір нүктеден шеңберге сызылған жанамалардың қасиетін пайдаланып, келесі теңдіктер енгіземіз :

$BA_1=x$, $A_1C=B_1C=12-x$, $AC_1=AB_1=13-x$.

$(13 – x) + (12 – x) = 9$ болғандықтан , $x=8$.

Яғни, $C_1B=BA_1= 8$, $AC_1=AB_1= 5$, $CA_1=CB_1=4$.

2. Герон формуласы арқылы:

$$S_{ABC} = \sqrt{17(17-13)(17-12)(17-9)} = 4\sqrt{170}.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BH, \quad BH=\frac{2S_{ABC}}{AC}, \quad BH=\frac{8\sqrt{170}}{9}.$$

3. ABH –тікбұрышты үшбұрышынан пифагор арқылы келесі теңдікті аламыз:

$$AH=\sqrt{13^2-\frac{64\cdot 170}{81}}=\frac{53}{9}.$$

4. CBH үшбұрышында AA_1 түзуі үшбұрыштың екі қабырғасын және үшінші қабырғаның жалғасын қияды. Менелая теорамасы арқылы:

$$\frac{BQ}{QH}\cdot\frac{HA}{AC}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}=1, \qquad \frac{BQ}{QH}\cdot\frac{\frac{53}{9}}{9}\cdot\frac{4}{8}=1, \qquad \frac{BQ}{QH}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{53}{81}=1, \qquad \frac{BQ}{QH}=\frac{162}{53}$$

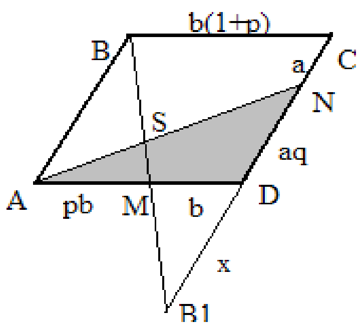
теңдігін аламыз.

Жауабы: BQ:QH=162:53.

Тапсырма 2. ABCD параллелограмы берілген. M нүктесі AD қабырғасын p қатынасында кесінділерге бөледі , N нүктесі DC қабырғасын q қатынасындағы кесінділерге бөледі. BM , AN түзулері S нүктесінде қиылысады . AS:SN қатынасын табыңыз (5 сурет) .

Берілгені:

ABCD параллелограмм,
AS:SN=?



(5 сурет)

Шешімі: $\frac{AM}{MD} = p \Rightarrow$ егер MD=b, онда AM=pb;

$\frac{DN}{NC} = q \Rightarrow$ егер NC = a, онда DN = aq.

B_1 - нүктесі BM кесіндісінің созылуы мен CD нүктелерінің қиылысу нүктесі болсын.

$\Delta MB_1D \sim \Delta BB_1C$, онда $\frac{BC}{MD} = \frac{CB_1}{DB_1}$;

$\frac{b(1+p)}{b} = \frac{a(1+q)+x}{x}$; $1+p = \frac{a(1+q)}{x} + 1$; $x = \frac{a(1+q)}{p}$.

BB_1 түзуі AND мүшбұрышының екі қабырғасын және үшінші қабырғасының созылуын қиып өтеді.

Меналай теорамасын қолданып,

$$\frac{AS}{SN} \cdot \frac{NB_1}{B_1D} \cdot \frac{DM}{MA} = 1,$$

$$\frac{AS}{SN} \cdot \frac{aq + \frac{a(1+q)}{p}}{\frac{a(1+q)}{p}} \cdot \frac{1}{p} = 1,$$

$\frac{AS}{SN} = \frac{p(1+q)}{pq+q+1}$ қатынасын аламыз.

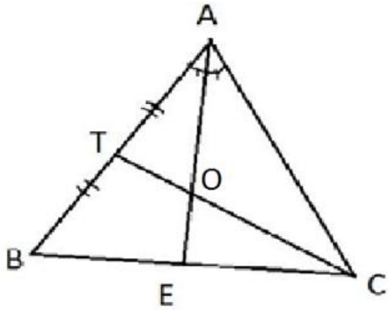
Жауабы: $\frac{AS}{SN} = \frac{p(1+q)}{pq+q+1}$.

Тапсырма 3. ABC үшбұрышында AE биссекрисасын BC қабырғасын BE:CE=2:1 қатынасында бөледі. CT медианасы AE биссекрисасын қандай қатынаста бөледі? *(6 сурет)*

Берілгені:

BE:CE=2:1

AO:OE=?



Сурет 6

AE биссектрисасы мен CT медианасының қиылысу нүктесін O деп белгілейік.

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{CE}} = \frac{2}{1} \to \frac{\mathrm{B}C}{\mathrm{CE}} = \frac{3}{1};$$

$$\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{TB}} = \frac{1}{1}.$$

Меналай теоремасын қолдана отырып,

$$\frac{A\mathrm{T}}{\mathrm{TB}} \cdot \frac{\mathrm{BC}}{C\mathrm{E}} \cdot \frac{E\mathrm{O}}{\mathrm{OA}} = 1$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{E\mathrm{O}}{\mathrm{OA}} = 1, \quad \frac{E\mathrm{O}}{\mathrm{OA}} = \frac{1}{3}.$$

AE биссектрисасын TC медианасы EO:OA=1:3 қатынасында бөледі.

Жауабы: EO:OA=1:3.

Тапсырма 4.

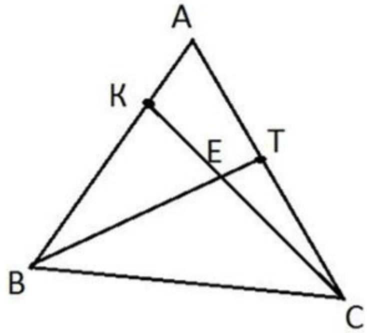
ABC үшбұрышында K нүктесі AB қабырғасын 1:2 қатынасында бөледі. T нүктесі AC қабырғасында жатыр. KC кесіндісі BT кесіндісін 5:2 қатынасында бөледі. T нүктесі AC қабырғасын қандай қатынаста бөледі? *(7 сурет)*

Берілгені:

AK:KB=1:2 ,

BE:ET=5:2 ,

AT:TC=?



Сурет 7

Шешімі:

Меналай теоремасын қолдана отырып:

$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{KB}} \cdot \frac{\mathrm{BE}}{ET} \cdot \frac{TC}{\mathrm{AC}} = 1$,

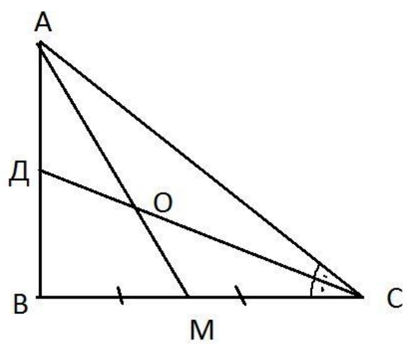
$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{TC}{\mathrm{AC}} = 1$,

$\frac{TC}{\mathrm{AC}} = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{TC}{\mathrm{AT}} = \frac{4}{1} \rightarrow \frac{AT}{\mathrm{TC}} = \frac{1}{4}.$

Жауабы: AT:TB=1:4.

Тапсырма 5.

ABC үшбұрышында AM медианасы мен СД биссектрисасы О нүктесінде қиылысады($\angle$B=90^0). ABC үшбұрышының ауданын табыңыз, егер CO=9, ОД=5. *(8 сурет)*



Сурет 8

Берілгені:

$\angle$B=90^0,

CO=9,

ОД=5,

S_{ABC}=?

Шешімі:

Меналай теормасын қолданамыз:

$$\frac{CO}{\text{ОД}} \cdot \frac{\text{ДА}}{AB} \cdot \frac{BM}{\text{МС}} = 1;$$

$$\frac{9}{5} \cdot \frac{\text{ДА}}{AB} \cdot \frac{1}{1} = 1;$$

$$\frac{\text{ДА}}{AB} = \frac{5}{9};$$

ДА=5x; ДВ=4x.

$$\frac{ВД}{\text{АД}} \cdot \frac{\text{АО}}{OM} \cdot \frac{MC}{2\text{МС}} = 1 \rightarrow \frac{4x}{5x} \cdot \frac{\text{АО}}{OM} \cdot \frac{MC}{2\text{МС}} = 1 \rightarrow \frac{\text{АО}}{OM} = \frac{5}{2},$$

АО=5у; ОМ=2у. ВМ=а

$S_{ABC} = 0.5 \cdot AB \cdot BC = 9xa$

Биссектрисаның қасиетін қолданып:

$$\frac{5x}{4x} = \frac{AC}{2a} \rightarrow \quad AC = 2.5a,$$

АС=$\sqrt{(9x)^2 + (2a)^2}$,

2.5a=$\sqrt{(9x)^2 + (2a)^2}$,

$$\frac{25a^2}{4} = 81x^2 + 4a^2 \rightarrow a=6x;$$

Биссектрисаның ұзындығының формуласы бойынша:

14=$\sqrt{AC \cdot 2a - 20x^2}$=$\sqrt{2.5a \cdot 2a - 20x^2} = \sqrt{5a^2 - 20x^2} =$ $\sqrt{5(6x)^2 - 20x^2}$=$\sqrt{160x^2}$

$196 = 160x^2$

$$x = \frac{7}{2\sqrt{10}}, \quad a = \frac{21}{\sqrt{10}}$$

$$S_{ABC} = 0.5 \cdot AB \cdot BC = 9xa = 9 \cdot \frac{7}{2\sqrt{10}} \cdot \frac{21}{\sqrt{10}} = \frac{1323}{20}$$

Жауабы: $S_{ABC} = \frac{1323}{20}$.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1 Темербекова А.А. Методика преподования математики: М.: Гуманит. изд.центр ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

2 Қайыңбаев Жанболат Тұрсынқожаұлы. Жаттығу, есеп ... «Математика және Физика журналы» №3, 2017. 2-4 б.

3 Генденштейн Л.Э., Ершова А.П., Ершова А.С. Наглядный справочник по математике с примерами. Для абитурентов, школьников,учителей. – М.: Илекса, 2005, – 192 с.
4 Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Юдина И.И. Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 1990. – 336с.
5 Гусев В.А., Мордкович А. Г. Математика: Справ. материалы – М.: Просвещение, 1999. – 416 с.
6 Мякишев А.Г. Элементы геометрии треугольника. – Библиотека «Математическое просвещение» – М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2002. – 32с.
7 Кулагин Е.Д. и др 3000 конкурсных задач по математике. – М., 2003. – 380 с.
8 Бидосов Ә. Математиканы оқыту әдістемесі: Оқу құралы. 2-ші басылым.- Алматы,2007. – 262 бет.
9 Качалкина Е.Применение теорем Чевы и Менелая/Математика. Издательский дом «Первое сентября», 2004, – №13. – с. 23-26.
10 Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся.- 2-е изд., перераб. И доп. – М.:Просвещение, 1984. – 175 с.
11 Виноградова Л.В. Методика преподования математики в средней школе: Ростов н/Д.: Феникс, 2005.-252 с.
12 Темербекова А.А. Методика преподования математики: М.: Гуманит. изд.центр ВЛАДОС, 2003. – 176 с.