ҒТАМР 27.03.02

DOI: https://doi.org/10.47344/sdu%20bulletin.v60i3.822

Ж.Т.Кайынбаев[1], М.К.Нұрпейіс[2]*

[1]Сүлейман Демирель атындағы университеті,Қаскелең, Қазақстан

[2]"Qalan.ru" ЖШС, Алматы, Қазақстан

*e-mail: dzhanbulat.kayinbayev@sdu.edu.kz

ШЕҢБЕР МЕН ДӨҢГЕЛЕККЕ БАЙЛАНЫСТЫ КҮРДЕЛІ ЕСЕПТЕРДІҢ БЕРІЛУ ТӘСІЛДЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ШЕШУ ЖОЛДАРЫ

Аңдатпа. Мақала, элементар геометрия мазмұнындағы маңызды мәселелер болып табылатын шеңбер мен дөңгелекке және оларға байланысты күрделі есептерді шешу жолдарына арналған. Жалпы бұл бағыттағы күрделі есептер, бір шеңбер екінші шеңбердің ішінде болғандағы(мұның өзі екі түрлі болып келеді), екі шеңбердің бір ғана ортақ нүктесі болғандағы(бұл жағдайдың да екі түрі бар), екі шеңбердің екі нүктеде қилысуы және екі шеңбердің ортақ нүктесі болмайтын жағдайларды қамтиды. Осы жағдайлардың әрбіреуі үшін күрделі есептерді шешу жолдары талқыланады. Сол сияқты, мақалада басқа да фигуралардың шеңберге іштей және сырттай сызылуы бойынша да күрделі есептер қамтылған. Мақала, математиканы оқыту әдістемесі саласының мамандарына, мұғалімдерге, докторанттар мен магистранттарға арналған.

Түйін сөздер: Шеңбер, дөңгелек, жанама, қиюшы,орда, шеңбердің ұзындығы,дөңгелектің ауданы, жанаманың қасиеттері, қиюшының қасиеттері, хорданың қасиеттері, шеңберлердің орналасуы.

Жалпы математикада немесе оның бір саласы геометрияда шеңбер мен дөңгелек ұғымдары және оларға байланысты пайымдаулар мен тұжырымдар өзінше бір әлем деуге болады. Күнделікті өмірде қолданылатын әр түрлі тұрмыстық техникалардан бастап тек қана өз саласының мамандарына ғана белгілі көптеген техникалық мәселелер осы шеңбер мен дөңгелекке байланысты теориялар негізінде өз шешімдерін тауып жатады. Тіпті арба доңғалағын ойлап табу және оны күнделікті тіршілікте қолдана бастау, қоғам дамуына тың серпін берді, оны жеделдетті, жаңа қырға шығарды. Шеңбер мен дөңгелектің ұқсастығы мен айырмашылығы жайлы айту, жалпы оңай мәселе емес. Оның басты себебі, дөңгелектің шекарасы шеңбер. Дөңгелек бар жерде оның шекарасы бар. Ал, ол дегеніміз шеңбер. Бұл фигуралардың ұқсастығы, олардың екеуі де жазықтықтағы фигуралар және екеуінің де радиустары мен диаметрлері бар. Сол сияқты олардың айырмашылықтары да жоқ емес.

Алайда, жалпы білім беретін орта мектеп геометрия мазмұнында осы фигураларға байланысты есептер өте аз және сол аз есептің өзі осы фигураларға қатысты қарапайым мәселелерді пысықтаумен ғана шектеледі. Бұл жағдай, жалпы білім беретін орта мектеп түлектерінде аталған мәселелер жайлы терең біліктілік қалыптаспайтынын көрсетіп отыр[2,9].

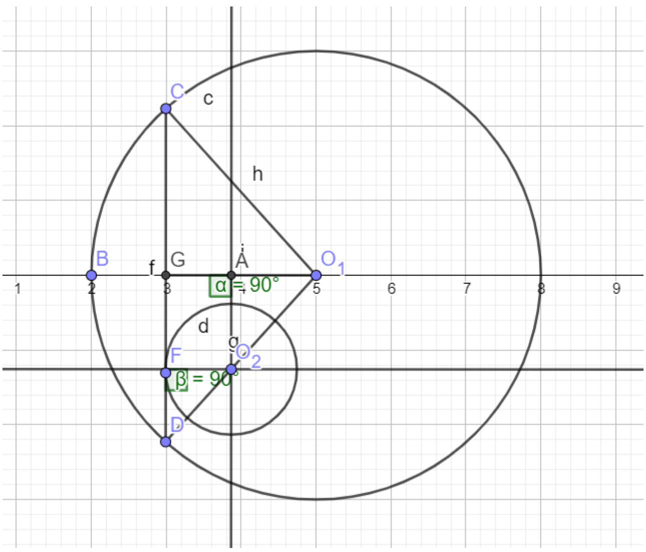
Бұл фигураларға байланысты күрделі есептерді шешу үшін, біздің және басқа ғалымдардың зерттеулері бойынша үш мәселе ескерілу керек[1,2,6,7,8,9].

Біріншіден, бұл фигуралардың элементтері және олардың анықтамалары;

Екіншіден, бұл фигуралардың элементтерінің қасиеттері;

Үшіншіден, шеңберлердің орналасуы жайлы бес жағдай.

1. Екі шеңбердің центрларының арақашықтығы 5r. Бірінші шеңбердің радиусы r, екінші шеңбердің радиусы 7r. Үлкен шеңбердің хордасы кіші шеңберді жанап өтеді және 1:6 қатынасында бөлінеді. Осы хорданың ұзындығын табыңыз.



Есептің шарты бойынша берілген мәселелерді жазып аламыз:

$O_1D = O_1C = 7r$

$O_2F = r$

$O_1O_2 = 5r$

$FD:FC = 1:6$

$CD = ?$

Шешуі:

1) $FD + FC = x + 6x = 7x$ (жалпы хорданың ұзындығы)
2) $O_1CD -$ теңбүйірлі үшбұрыш, $CG = GD = \frac{7x}{2} = 3{,}5x$ (CD хорданың жартысы)

O_1GD үшбұрышына пифагор теоремасын қолданатын болсақ:

$$O_1G = \sqrt{O_1D^2 - GD^2} = \sqrt{49r^2 - \frac{49x^2}{4}} = 7\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$$

3) $\mathrm{GF} = \mathrm{CF} - \mathrm{CG} = 6x - \frac{7x}{2} = \frac{5x}{2}$
4) $O_2A = GF = 2{,}5x$

$$O_1A = O_1G - GA = 7\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} - r$$

5) ΔO_2AO_1 үшбұрышында Пифагор теоремасын қолданатын болсақ:

$O_1O_2^2 = O_2A^2 + O_1A^2$ тапқан мәндерін орнына қоятын болсақ:

$$25r^2 = \frac{25x^2}{4} + 49\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right) - 14r\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} + r^2$$

$$14r\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} = 25r^2 - 6x^2 \qquad (25r^2 - 6x^2 \geq 0)$$

$$196r^2\left(r^2 - \frac{x^2}{4}\right) = 625r^4 - 300x^2r^2 + 36x^4$$

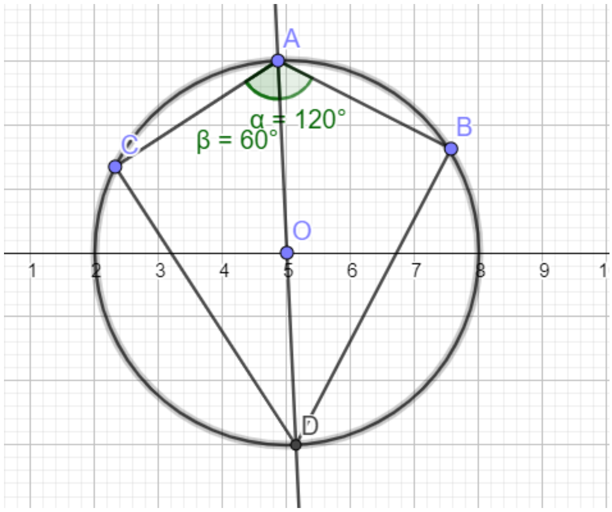
$36x^4 - 251x^2r^2 + 429r^4 = 0$ Осы теңдеуді дискриминантпен шешіп, түбірлерін болсақ:

$x_1 = \frac{\sqrt{143}r}{6} \rightarrow x_1 \neq \frac{\sqrt{143}r}{6}$ бұл түбірі сәйкес келмейді, себебі $\mathrm{CD} < 2 * 7r \rightarrow 7 * \frac{\sqrt{143}r}{6} < 14r \quad \emptyset$

$x_2 = \sqrt{3}r$ осыдан $\mathrm{CD} = 7\sqrt{3}r$

Жауабы: $\mathrm{CD} = 7\sqrt{3}r$

2. Шеңберде АВ және АС екі хорда жүргізілген, АВ = 2см, АС = 1см, $< CAB = 120^\circ$. САВ бұрышын қақ екіге бөліп тұрған хорданың ұзындығын табыңыз.



Есептің шарты бойынша берілген нәрселерді жазып аламыз:

$AB = 2,\ \ AC = 1,\ \ \ < CAB = 120^{\circ},\ AD = ?$

Шешуі:

Келесі доғаларды тауып аламыз:

$\cup CD = \cup DB$

$= 60^{\circ}$ Осыған орай келесі кесінділерді әріппен белгілеп аламыз:

$AD = y,\ CD = DB = x$

$\Delta ACD \rightarrow$ косинустар теоремасы бойынша: x^2

$$= AC^2 + y^2 - 2 * AC * y * cos60^{\circ} = 1 + y^2 - y$$

$\Delta ABD \rightarrow$ косинустар теоремасы бойынша: x^2

$$= AB^2 + y^2 - 2 * AB * y * cos60^{\circ} = 4 + y^2 - 2y$$

Осы екі теңдіктің сол жағы бірдей болғандықтан, оң жағы да бірдей болады:

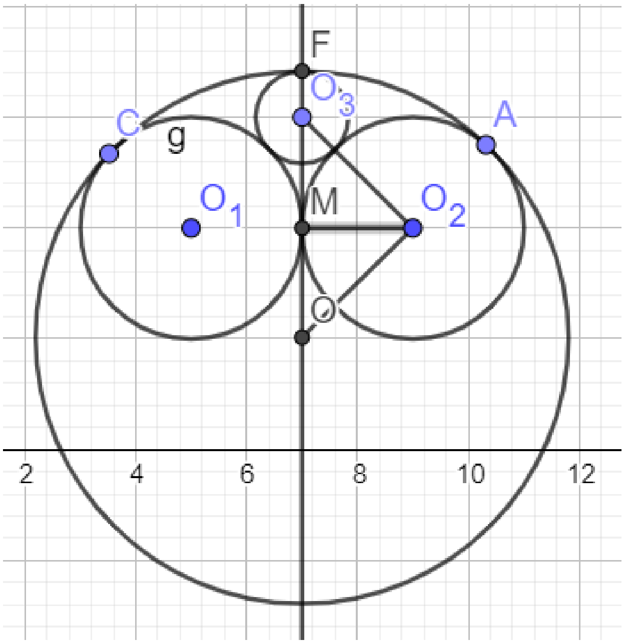
$1 + y^2 - y = 4 + y^2 - 2y$

Теңдеуді шешетін болсақ, келесі мәнді аламыз:

$y = 3$ осыдан $AD = 3$ болады.

Жауабы: AD = 3см

3. Радиустары бірдей r екі шеңбер сырттай жанасады және радиусы R болатын үшінші шеңбермен іштей жанасады. Осы шеңберлердің барлығымен бірдей жанасатын шеңбердің радиусын табыңыз (мүмкін болатын екі жағдайдың ішінен төртінші шеңбердің центрі мен радиусы R шеңбердің центрі радиусы r шеңберлердің жанама нүктесінің қарама-қарсы жағында жатқан жағдайын қарастырыңыз).



Есептің шарты бойынша:

$O_1M = O_2M = r$

$OF = OC = R$

$O_3F = ?$

Шешуі:

1) ΔMOO_2 үшбұрышы бойынша Пифагор теоремасын қолданамыз:
   $OM^2 + MO_2^2 = OO_2^2$
2) $OA = R$ (радиус) $OO_2 = R - r$, осы мәндерді үстіңгі теңдікке қоятын болсақ:
   $OM^2 + r^2 = (R - r)^2$
   $OM^2 = R^2 - 2Rr$
   $OM = \sqrt{R^2 - 2Rr}$
3) $OF = R$ (радиус), $O_3F = x$ деп белгілеп аламыз
   $OM = OF - O_3F - O_3M = R - x - O_3M$
4) ΔO_3O_2M үшбұрышы бойынша Пифагор теоремасын қолданамыз:
5) $O_3O_2^2 = O_2M^2 + O_3M^2$
   $(r + x)^2 = MO_3^2 + r^2$
   $MO_3 = \sqrt{2rx + x^2}$
   $\sqrt{R^2 - 2Rr} = R - x - \sqrt{2rx + x^2}$
   $\sqrt{2rx + x^2} = R - x - \sqrt{R^2 - 2Rr}$

$$2R(R - r - \sqrt{R^2 - 2Rr}) = 2x^2 + 2x(R - x - \sqrt{R^2 - 2Rr} + r)$$

Осы теңдіктен x-ты табатын болсақ:

$$x = \frac{R(R - r - \sqrt{R^2 - 2Rr})}{R - \sqrt{R^2 - 2Rr} + r}$$

Жауабы: $\boldsymbol{x = \frac{R(R - r - \sqrt{R^2 - 2Rr})}{R - \sqrt{R^2 - 2Rr} + r}}$

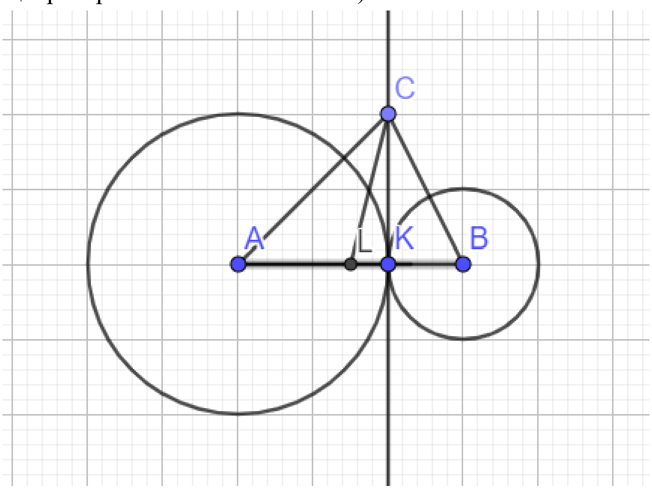
4. Центрлары A және B, сәйкесінше радиустары 2 және 1-ге тең шеңберлер бір бірімен жанасады. Осы екі шеңберді жанайтын түзудің бойында C нүктесі орналасқан және ол AB кесіндісінің ортасынан $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ см қашықтықта орналасқан. Егер ABC үшбұрышының ауданы S>2 болса, онда осы ауданды табыңыз.

Есептің шарты бойынша:

$AK = 2,\ BK = 1,\ CL = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\ S_{ABC} > 2,\ S_{ABC} = ?$

Шешуі:

1- жағдай (Екі шеңбер сырттай жанасатын болса):



$AB = 3,\ AL = BL = 1{,}5$ (AB кесіндісінің жартысы)

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB * CK$ (үшбұрыштың ауданы)

ΔCKL үшбұрышында $< CKL$ бұрышы $90^\circ -$ қа тең

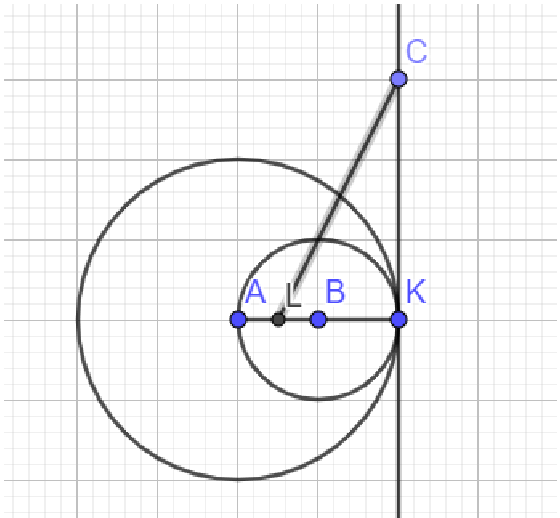
$LK = BL - BK = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$

ΔCKL үшбұрышында Пифагор теоремасын қолдансақ:

$$CK = \sqrt{CL^2 - LK^2} = \sqrt{(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}})^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{5}{\sqrt{8}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} * \frac{5\sqrt{2}}{4} * 3 = \frac{15\sqrt{2}}{8} > 2$ (Есептің шарты бойынша екіден үлкен)

2- жағдай (екі шеңбер іштей жанасатын болса):



$AK = 2,\ BK = AB = 1,\ CL = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\ S_{ABC} > 2,\ S_{ABC} = ?$

$AL = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$

$KL = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

ΔCKL үшбұрышында Пифагор теоремасын қолдансақ:

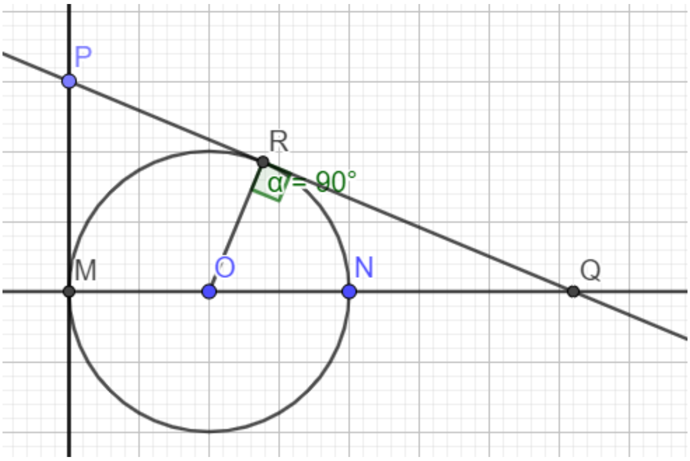
$CK = \sqrt{CL^2 - KL^2} = \sqrt{(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}})^2 - (\frac{3}{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} * \frac{3\sqrt{2}}{4} * 1 = \frac{3\sqrt{2}}{8} < 2\ (\emptyset)$ (Есептің шарты бойынша үшбұрыштың ауданы екіден үлкен болу керек, сол себепті бұл жағдай сәйкес келмейді)

Жауабы: $\frac{15\sqrt{2}}{8}$

5. Диаметрі MN=16 болатын шеңбер берілген. M нүктесінен осы шеңберге жүргізілген жанама арқылы MP>15 кесіндісі жүргізілген. P нүктесінен MN түзуін Q нүктесінде қиятын екінші жанама жүргізілген. MPQ үшбұрышының периметрі 72 болса, ауданын табыңыз.

Суреті:



Есептің берілгені бойынша:

$MN = 16, \qquad MP > 15, \qquad P_{MPQ} = 72, \qquad S_{MPQ} = ?$

Шешуі:

$NQ = c, \qquad MP = PR = a, \qquad RQ = b$ деп алайық

$MP = PR$ (жанама қасиеті бойынша)

$RO = \frac{MN}{2} = 8$ (радиус)

$MQ = MN + NQ = 16 + c$

$OQ = ON + NQ = 8 + c$

$\Delta ORQ \sim \Delta MPQ$ үшбұрыштар ұқсастығынан келесі теңдіктерді аламыз: $\frac{RO}{PM} = \frac{QO}{PQ} = \frac{RQ}{MQ}$

$\frac{8}{a} = \frac{8 + c}{b + a} = \frac{b}{16 + c}$

Бірінші теңдікті алсақ, келесі шығады:

$8b + 8a = 8a + ac$

(1) $8b = ac$

Екінші теңдікті алсақ:

$(8 + c)(16 + c) = b(b + a)$

(2) $c^2 + 24c + 128 = b^2 + ba$

Бірінші және үшінші бөлшектерді теңестірсек:

(3) $128+8c=ab$

(3) теңдікті (2)-ші теңдікке қоямыз:

$c^2 + 24c + 128 = b^2 + 128 + 8c$

Осыдан келесі теңдікті аламыз:

$b^2 = c^2 + 16c$

PMQ үшбұрышының периметрі:

$P_{MPQ} = 2a + b + c + 16 = 72$

Екі жағын екіге бөліп, а-ның мәнін өрнектейміз:

$a = 28 - 0{,}5b - 0{,}5c$ осыны PQ табуға қолданмыз:

$PQ = a + b = 28 - 0{,}5c + 0{,}5b$

PMQ үшбұрышында Пифагор теоремасын қолданамыз:

$MP^2 = PQ^2 - MQ^2$

Үстінде өрнектеп алған мәндерді орнына қойып шығамыз:

$(28 - 0{,}5b - 0{,}5c)^2 = (28 - 0{,}5c + 0{,}5b)^2 - (16 + c)^2$

$c^2 + 256 + 32c + bc = 56b$

$b = \frac{c^2 + 256 + 32c}{56 - c} \qquad (b^2 = c^2 + 16c)$

$\left(\frac{c^2 + 256 + 32c}{56 - c}\right)^2 = c^2 + 16c$

$c = 2, (c = 12{,}8\ \emptyset)$

$b = 6, \qquad a = 24$

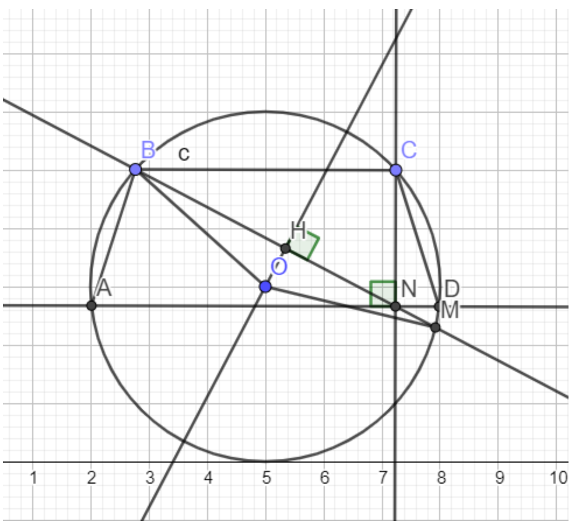
Енді үшбұрыштың ауданын есептейтін болсақ:

$S_{MPQ} = \frac{1}{2} * MP * MQ = \frac{1}{2} * 24 * 18 = 216$

Жауабы: $S_{MPQ} = 216$

6. Центрі O болатын шеңберге іштей ABCD трапециясы сызылған, AD||BC, AD=7, BC=3, BCD бұрышы $120^\circ -$ қа тең, BM хордасы AD кесіндісін N нүктесінде қияды, ND=2. BOM үшбұрышының ауданын табыңыз.

Суреті:



Есептің берілгені бойынша:

$AD||BC, \quad AD = 7, \quad BC = 3, \quad < BCD = 120^\circ, \quad ND = 2,$
$S_{BOM} = ?$

Шешуі:

Трапеция шеңберге іштей сызылса, онда ол теңбүйірлі болады.

$AB = CD$

$ND = \frac{AD - BC}{2} = 2 \quad \rightarrow \quad CN -$ биіктік

$< BCD =< ABC = 120^\circ \quad \rightarrow \quad < BAD =< ADC = 60^\circ \quad \rightarrow \quad \Delta CND: < NCD = 30^\circ$

ΔCND: $\tan 60^\circ = \frac{CN}{DN} \quad \rightarrow \quad CN = \tan 60^\circ * DN = 2\sqrt{3}$

Хорда қасиеті бойынша:

$BN * NM = AN * ND \quad \rightarrow \quad NM = \frac{AN * ND}{BN} = \frac{AN * ND}{\sqrt{BC^2 + CN^2}} = \frac{5 * 2}{\sqrt{21}} = \frac{10\sqrt{21}}{21}$

$BM = BN + NM = \sqrt{21} + \frac{10\sqrt{21}}{21} = \frac{31\sqrt{21}}{21}$

$OB = OM = R$

Синустар теоремасы бойынша:

ΔACD: $\quad 2R = \frac{AC}{\sin ADC} \quad \rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{AN^2+CN^2}}{2*\sin 60^\circ} = \sqrt{\frac{37}{3}}$

ΔBOM: OH – биіктік

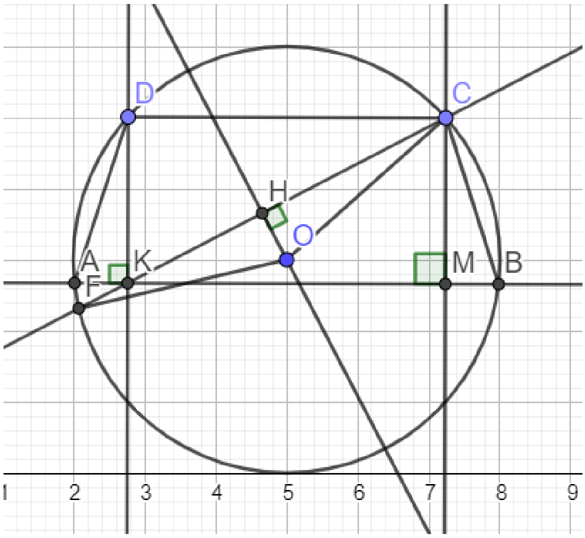
$OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{\frac{37}{3} - \frac{961}{84}} = \sqrt{\frac{75}{84}} = \sqrt{\frac{25}{28}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$

$S_{BOM} = \frac{1}{2} * OH * BM = \frac{1}{2} * \frac{5\sqrt{7}}{14} * \frac{31\sqrt{21}}{21} = \frac{155\sqrt{3}}{84}$

Жауабы: $S_{BOM} = \frac{155\sqrt{3}}{84}$

7. Центрі O болатын шеңберге іштей ABCD трапециясы сызылған, AB||DC, AB=5, DC=1, ABC бұрышы 60° – қа тең. K нүктесі AB кесіндісінде жатыр, AK = 2. CK түзуі C нүктесінен бөлек шеңберді F нүктесінде қияды. OFC үшбұрышының ауданын табыңыз.

Суреті:



Есептің берілгені бойынша:

$AB||DC, \quad AB = 5, \quad DC = 1, \quad < ABC = 60^\circ, \quad AK = 2,$

$S_{OFC} = ?$

Шешуі:

Трапеция шеңберге іштей сызылса, онда ол теңбүйірлі болады.

$AK = \frac{AB - CD}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \rightarrow \quad DK -$ биіктік

$< ABC = < BAD = 60^\circ$

ΔADK: $< AKD = 90^\circ$, $< ADK = 30^\circ \quad \rightarrow \quad AD = AK * 2 = 4$

$DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$

$DK = CM, \; DC = KM$

ΔCKM: $\quad CK = \sqrt{CM^2 + KM^2} = \sqrt{12 + 1} = \sqrt{13}$

Хорда қасиеті бойынша:

$AK * KB = CK * KF$

$$KF = \frac{AK * KB}{CK} = \frac{2 * 3}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

$$CF = CK + KF = \sqrt{13} + \frac{6\sqrt{13}}{13} = \frac{19\sqrt{13}}{13}$$

$CO = OF = R$

Синустар теоремасы бойынша:

ΔADB:

$$2R = \frac{BD}{\sin BAD} \quad \rightarrow \quad R = \frac{\sqrt{DK^2 + BK^2}}{2 * \sin 60^\circ} = \sqrt{\frac{21}{3}} = \sqrt{7}$$

ΔCOF: $OH -$ биіктік

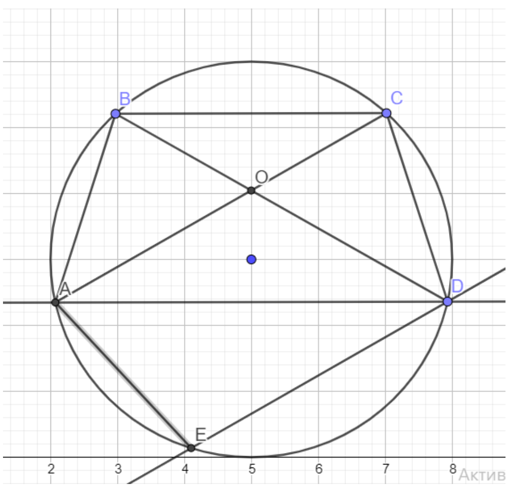
$$OH = \sqrt{OC^2 - CH^2} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - (\frac{19\sqrt{13}}{13 * 2})^2} = \frac{\sqrt{39}}{26}$$

$$S_{OFC} = \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{39}}{26} * \frac{19\sqrt{13}}{13} = \frac{19\sqrt{3}}{52}$$

Жауабы: $S_{OFC} = \frac{19\sqrt{3}}{52}$

8. AD және AC үлкен табандары тең болатын ABCD және ACDE трапециялары бір шеңберге іштей сызылған. O - ABCD трапециясының диагональдарының қиылысу нүктесі, ADE үшбұрышының ауданы $1 + \sqrt{3} -$ ке, ал COD бұрышы 60-қа тең болса, осы шеңбердің радиусы нешеге тең?

Суреті:



Есептің берілгені бойынша:

$$AD = AC, \;\; S_{ADE} = 1 + \sqrt{3}, \;\; < COD = 60^\circ, \quad R = ?$$

Шешуі:

Трапеция шеңберге іштей сызылса, онда ол теңбүйірлі болады.

ABCD, ACDE – теңбүйірлі трапециялар, AB=CD=AE

$\cup AB = \cup CD = \cup AE$

$\cup AB + \cup BC = \cup AE + \cup ED \quad \rightarrow \quad \cup BC = \cup ED$

$\cup AB = 60^\circ, \qquad \cup BC = \beta 3$

$* 60 + 2\beta = 360$

$\beta = 90^{\circ}$

$< ADE = \dfrac{\cup AE}{2} = 30^{\circ}$ (доға қасиеті)

$< DAE = \dfrac{\cup DE}{2} = 45^{\circ}$

Синустар теоремасы бойынша:

$2R = \dfrac{AE}{sinADE}$, $\quad 2R = \dfrac{DE}{sinDAE}$

$S_{ADE} = \dfrac{1}{2} * AE * DE * sinAED = \dfrac{1}{2} * 2R * sin30 * 2R * sin45 * sin105$

$1 + \sqrt{3} = 2 * R * \dfrac{1}{2} * \dfrac{\sqrt{2}}{2} * \sin(180 - 75)$

$\sin 75 = \sin(30 + 45) = sin30 * cos45 + sin45 * cos30 = \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$= \dfrac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}$

$R = 4$

Жауабы: R = 4

Алынған тақырыпты сараптай келе төмендегідей қорытындыларға келуге болады деп тұжырымдаймыз:

Шеңберлердің орналасуы жайлы бес жағдайдың теориялық негізіне элементар геометрия мазмұнында ерекше тоқталу керек деп есептейміз.

Шеңбер мен дөңгелекке байланысты теориялық материалдарды қамтыған және күрделі есептер мен олардың шешілу үлгілері бар таңдау немесе қолданбалы курстар мазмұнын қазақ және орыс тілдерінде (Орыс тілінде де бұл тақырыпқа арналған материалдар жоқ деуге болады) дайындау керек деп есептейміз;

Пайдаланған әдебиеттер тізімі

1. Қайыңбаев Ж.Т. Жаттығу, есеп «Математика және Физика журналы» №3, 2017. 2-4 б.
2. Ж.Т. Қайыңбай. Кейбір геометриялық мәселелерді жалпы жағдайдан жеке жағдайға көшіру негізінде қарастыру. СДУ хабаршысы. 2019/4(51). SDUbulletin.
3. Ж.Т. Қайыңбаев, Д. Төлбасы . Менелай теоремасы және оның қолданылуы. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods. 2021/1 (54).

4. Ж.Т. Қайыңбаев, А.С. Ғалымжан. Геометриялық есептерді тригонометриялық мәселелердің көмегімен шешу тәсілдері. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods. 2021/1 (54).
5. Ж.Т. Қайыңбаев1, Т.С. Манап. Үшбұрыштың биссектрисасы, медианасы және олардың қасиеттерін пайдаланып күрделі геометриялық есептерді шешу тәсілдері. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods 2021/2 (55).
6. Ж.Т. Қайыңбаев, Қ. Үдербаева. Тең бүйірлі және тік бұрышты үшбұрыштарға іштей және сырттай сызылған шеңберлерге байланысты күрделі есептерді шешу тәсілдері. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods 2021/2 (55).
7. Кулагин Е.Д. и др 3000 конкурсных задач по математике. – М., 2003.
   a. 380 с.
8. Генденштейн Л.Э. Ершова А.П., Ершова А.С. Наглядный справочник по математике с примерами. Для абитурентов, школьников, учителей. – М.: Илекса, 2005, – 192 с.
9. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.
10. Темербекова А.А. Методика преподования математики: М.: Гуманит. изд.центр ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

References

1. Qaiyñbaev J.T. Jattyğu, esep «Matematika jäne Fizika jurnaly» №3, 2017. 2-4 b.
2. J.T. Qaiyñbai. Keibır geometrialyq mäselelerdı jalpy jağdaidan jeke jağdaiğa köşıru negızınde qarastyru. SDU habarşysy. 2019/4(51). SDUbulletin.
3. J.T. Qaiyñbaev, D. Tölbasy . Menelai teoremasy jäne onyñ qoldanyluy. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods. 2021/1 (54).
4. J.T. Qaiyñbaev, A.S. Ğalymjan. Geometrialyq esepterdı trigonometrialyq mäselelerdıñ kömegımen şeşu täsılderı. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods. 2021/1 (54).
5. J.T. Qaiyñbaev1, T.S. Manap. Üşbūryştyñ bisektrisasy, medianasy jäne olardyñ qasietterın paidalanyp kürdelı geometrialyq esepterdı şeşu täsılderı. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods 2021/2 (55).
6. J.T. Qaiyñbaev, Q. Üderbaeva. Teñ büiırlı jäne tık būryşty üşbūryştarğa ıştei jäne syrttai syzylğan şeñberlerge bailanysty kürdelı esepterdı şeşu

täsılderı. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods 2021/2 (55).
7. Kulagin E.D. i dr 3000 konkursnyh zadach po matematike. – M., 2003. – 380 s.
8. Gendenştein L.E. Erşova A.P., Erşova A.S. Naglädnyi spravochnik po matematike s primerami. Dlä abiturentov, şkölnikov, uchitelei. – M.: İleksa, 2005, – 192 s.
9. Fridman L.M., Tureski E.N. Kak nauchitsä reşät zadachi: Posobie dlä uchaşihsä. – 2-e izd., pererab. İ dop. – M.: Prosveşenie, 1984. – 175 s.
10. Temerbekova A.A. Metodika prepodovania matematiki: M.: Gumanit. izd.sentr VLADOS, 2003. – 176 s.

Dzh.T. Kayinbaev[1], M. K. Nurpeiis[2]
[1]Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
[2]"Qalan.ru" LLP, Almaty, Kazakhstan
*e-mail: dzhanbulat.kayinbayev@sdu.edu.kz

METHODS AND TECHNIQUES FOR SOLVING COMPLEX CALCULATIONS INVOLVING CIRCLES AND WHEELS.

Abstract. The article is devoted to circles and circles, which are important issues in the content of elementary geometry, and ways to solve complex problems related to them. In general, difficult problems in this area include cases where one circle is inside another circle (these are two different things), when two circles have only one common point (there are two types of cases), when two circles intersect at two points and two circles do not have a ommon point. For each of these cases, solutions to difficult problems are discussed. The article also contains difficult tasks of drawing other shapes inside and outside the circle. The article is intended for specialists in the field of mathematics teaching methods, teachers, doctoral students and undergraduates.
Keywords: problem, difficult problem, circle, tangent, intersecting, chord, circumference, area of a circle, tangent properties, intersecting properties, chord properties, arrangement of circles.

Ж.Т.Кайынбаев[1], М.К.Нурпеис[2]
[1]Университет имени Сулеймана Демиреля, Каскелен, Казахстан
[2]ТОО «Qalan.ru», г. Алматы, Казахстан
*e-mail: dzhanbulat.kayinbayev@sdu.edu.kz

МЕТОДЫ И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ РАСЧЕТОВ

КРУГА И КОЛЕСА

Аннотация. Статья посвящена кругам и окружностям, которые являются важными вопросами содержания элементарной геометрии, и способам решения связанных с ними сложных задач. В целом, к сложным задачам в этой области относятся случаи, когда одна окружность находится внутри другой окружности (это две разные вещи), когда две окружности имеют только одну общую точку (есть два типа случаев), когда две окружности пересекаются в двух точках и две окружности не имеют общей точки. Для каждого из этих случаев обсуждаются решения сложных проблем. В статье также содержатся сложные задачи рисования других фигур внутри и вне круга. Статья предназначена для специалистов в области методики обучения математике, преподавателей, докторантов и магистрантов.

Ключевые слова: задача, сложная задача, круг, окружность, касательная, пересекающая, хорда, длина окружности, площадь окружности, свойства касательной, свойства пересекающей, свойства хорды, расположение окружностей.

Келіп түсті 26 Маусым 2022