ҒТАМР 27.03.02

DOI: https://doi.org/10.47344/sdu%20bulletin.v62i1.990

*С.А. Алпамыс[1]**

[1]Сүлейман Демирель атындағы университеті, Қаскелең, Қазақстан

*e-mail: samalbek_96@mail.ru

ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДІҢ ОҢТАЙЛЫ ТӘСІЛДЕРІН ІЗДЕУ

Аңдатпа. Қазіргі уақытта біз қоршаған ортада болып жатқан көптеген жаңа құбылыстарды байқаймыз. Бұл құбылыстар кез-келген адамнан жаңа қасиеттердің болуын талап етеді. Ең алдымен қоғамға стандарттан тыс ойлайтын, өз ойы негізінде шешім шығаратын және жаңа бастамаларды ұсынатын тұлғалар қажет. Осындай қасиеттерді математика сабағында немесе сабақтан тыс уақытта есептерді шығару арқылы қалыптастыруға болады. Геометрия оқулығында геометриялық есептерді шешу көбінесе стандартты алгоритмге негізделеді. Бұл алгоритм оқушылар үшін күрделі болуы мүмкін. Сондықтан геометриялық есептерді шешудің басқа әр түрлі әдіс-тәсілдерін іздеп оңтайлы әдісті табу керек. Бұл мақалада геометриялық бір есепті шешудің бірнеше әдістерін көрсетіп оңтайлы әдісті табамыз. Геометриялық есепті әр түрлі әдіспен шешу оқушылардың математикалық білімін тереңдетеді және шығармашылық қабілетін дамытады.

Түйін сөздер: Үшбұрыш, Менелай теоремасы, Пифагор теоремасы, координаттар әдісі, шығармашылық қабілет, оңтайлы әдіс.

Есеп: АВС үшбұрышының биссектрисасы BF және медианасы АК өзара перпендикуляр қиылысады. Биссектриса BF және медиана АК ұзындықтары бірдей 208-ге тең. АВС үшбұрышының қабырғаларын табыңыз.

1- Шешімі. Геометриялық тәсіл (сурет 1)

1) O – BF және АК кесінділерінің қиылысу нүктесі.

ABK үшбұрышы тең бүйірлі болғандықтан биссектриса ВО оның биіктігі болады, яғни AO = OK = 104, BC = 2BK = 2AB.

2) Үшбұрыш биссектрисасының қасиеті бойынша: $\frac{AF}{AB} = \frac{CF}{BC}$, $CF = \frac{AF \cdot BC}{AB} = \frac{AF \cdot 2AB}{AB}$,

$CF = 2AF$, $AC = 3AF$.

3) B төбесі арқылы AC кесіндісіне параллель түзу жүргіземіз.

P – BP түзумен AK медигананың қиылысу нүктесі, BP = AC = 3AF.

4) AOF және BOP ұқсас үшбұрыштар, сондықтан $\frac{OF}{BO} = \frac{AF}{BP} = \frac{AF}{3AF} = \frac{1}{3}$, онда

$OF = 52, BO = 156$.

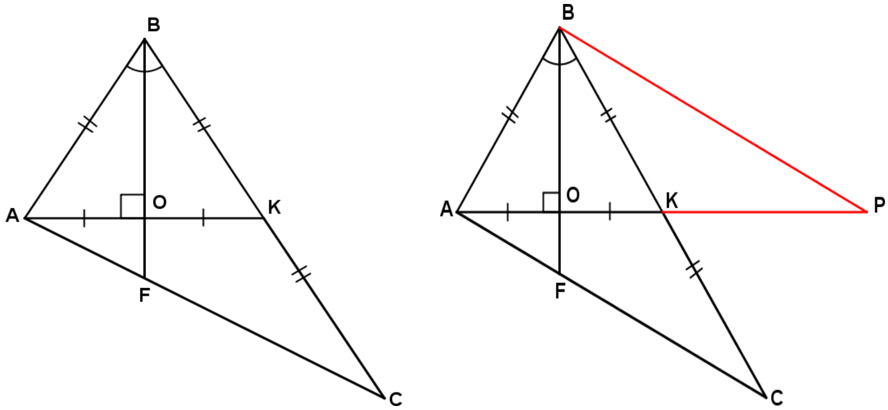
5) AOB тікбұрышты үшбұрышын қарастырамыз. Пифагор теоремасын қолдана отырып, AB қабырғасын табамыз: $AB^2 = AO^2 + BO^2, AB^2 = 104^2 + 156^2$,

$AB^2 = 10816 + 24336$, $AB^2 = 2704 \cdot 13$, $AB = 52\sqrt{13}$, онда $BC = 2AB = 104\sqrt{13}$.

6) AOF тікбұрышты үшбұрышын қарастырамыз. Пифагор теоремасын қолдана отырып, AF қабырғасын табамыз: $AF^2 = AO^2 + FO^2, AB^2 = 104^2 + 52^2 = 2704 \cdot 5$,

$AF = 52\sqrt{5}$, онда $AC = 3 \cdot 52\sqrt{5} = 156\sqrt{5}$.

Жауабы: $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{5}$



Сурет 1. Есепті шешудің геометриялық әдісіне сурет салу

2-Шешімі. Координаттар әдісі (сурет 2)

1) BF=208, AK=208.

ABC үшбұрышын тікбұрышты координаттар жүйесіне саламыз, O - BF биссектрисасы мен AK медианасының қиылысу нүктесі. AOB үшбұрышы KOB үшбұрышына тең (тікбұрышты), сондықтан AO = OK = 104, AB = BK, BC = 2BK = 2AB.

2) ABC үшбұрыш төбелерінің координатасын келесідей түрде жазамыз. $A(-104;\ 0)$, $B(0;\ y_B)$, $K(104;\ 0)$. K нүктесі BC қабырғасының ортасы, сондықтан $C(208; y_B)$ нүктесін осылай жаздық, $F(0; y_F)$ нүктесі AC түзуіне тиесілі.
3) AC түзуінің теңдеуін мына формула $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ бойынша жазамыз. $\frac{x+104}{208-(-104)}=\frac{y-0}{-y_c-0}$;

$F(0; y_F)$ нүктесі AC түзуіне тиесілі: $\frac{0+104}{312}=\frac{y_F}{-y_C}$, $y_F=\frac{-y_C}{3}$. Нүктелердің арақашықтығын табу формуласын қолданамыз: $d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$, $BF^2=(0-0)^2+(y_F-y_B)^2$

$BF^2=\left(\frac{y_C}{3}+y_B\right)^2$

$208^2=\left(\frac{y_B}{3}+y_B\right)^2$, $y_B=156$.

$B(0;156)$, онда $C(208;-156)$

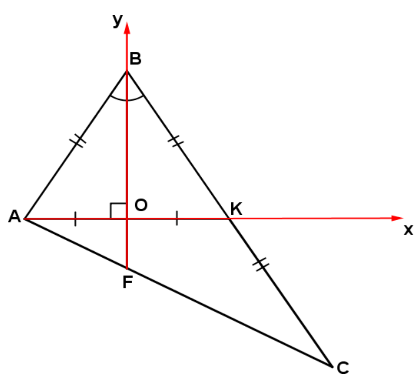
4) Нүктелердің арақашықтығын табу формуласы бойынша ABC үшбұрышының қабырғаларын табамыз.

$AB=\sqrt{(0+104)^2+(0-156)^2}$, $AB=52\sqrt{13}$,

$BC=2AB=104\sqrt{13}$

$AC=\sqrt{(208+104)^2+(-156-0)^2}$, $AC=156\sqrt{5}$

Жауабы: $AB=52\sqrt{13}$, $BC=104\sqrt{13}$, $AC=156\sqrt{5}$.



Сурет 2. Координаттар әдісімен шешуге арналған есептің сызбасы

3 – Шешімі. Үшбұрыштың орта сызығы теоремасын қолдану (сурет 3)

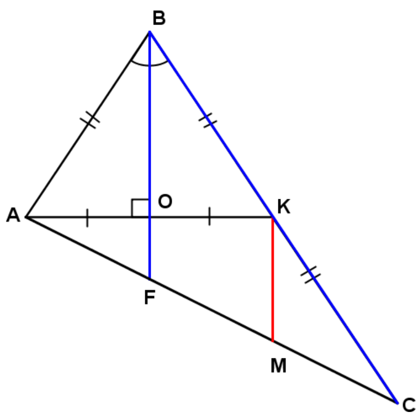
1) BFC үшбұрышын қарастырамыз: KM орта сызығын жүргіземіз.
2) $KM \parallel BF$ және $AO = OK$, онда $OF -$ AKM үшбұрышының орта сызығы. $OF = \frac{1}{2}KM$, $KM = \frac{1}{2}BF \Rightarrow OF = \frac{1}{4}BF$.
3) $BF = 208$, онда $OF = 52$, $BO = 156$
4) Пифагор теоремасын қолдана отырып ABC үшбұрышының қабырғаларын табамыз:

$AB = 52\sqrt{13}$

$BC = 2AB = 104\sqrt{13}$

$AC = 3AF = 3 \cdot 52\sqrt{5} = 156\sqrt{5}$

Жауабы: $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{5}$



Сурет 3. Үшбұрыштың орта сызығы теоремасын қолдану

4 – Шешімі. Тригонометриялық әдіс (сурет 4)

1) $AB = x, \angle ABC = 2\beta$.

Косинустар теоремасын қолдана отырып, ΔABF қарастырайық, AF арқылы өрнектеп жазамыз:

$AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2 \cdot AB \cdot BF \cdot \cos\angle ABF$

$AF^2 = x^2 + 208^2 - 2 \cdot x \cdot 208 \cdot \cos\angle ABF$

$AF^2 = x^2 + 208^2 - 416x \cdot \cos\angle\beta$

2) ΔBCF қарастырайық, CF арқылы өрнектеп жазамыз:

$CF^2 = BC^2 + BF^2 - 2 \cdot BC \cdot BF \cdot \cos\angle FBC$

$CF^2 = (2x)^2 + 208^2 - 2 \cdot 2x \cdot 208 \cdot \cos\angle\beta$

$CF^2 = 4x^2 + 208^2 - 832x \cdot \cos\angle\beta$

3) CF = 2AF (биссектриса қасиеті бойынша), онда $CF^2 = 4AF^2$:

$4x^2 + 208^2 - 832x \cdot \cos\angle\beta = 4(x^2 + 208^2 - 416x \cdot \cos\angle\beta)$

$4x^2 + 208^2 - 832x \cdot \cos\angle\beta = 4x^2 + 4 \cdot 208^2 - 4 \cdot 416x \cdot \cos\angle\beta)$

$4 \cdot 416x \cdot \cos\angle\beta - 832x \cdot \cos\angle\beta = 4 \cdot 208^2 - 208^2$

$832x \cdot \cos\angle\beta = 208^2 \cdot 3$

$$x \cdot \cos\angle\beta = \frac{208^2 \cdot 3}{208 \cdot 4}$$

$x \cdot \cos\angle\beta = 156$

Тікбұрышты үшбұрыштың сүйір бұрышының косинусын табу анықтамасы бойынша: $\cos\beta = \frac{BO}{AB} \Rightarrow BO = x \cdot \cos\beta = 156,\ BO =$

156 болса, онда $OF = 52$

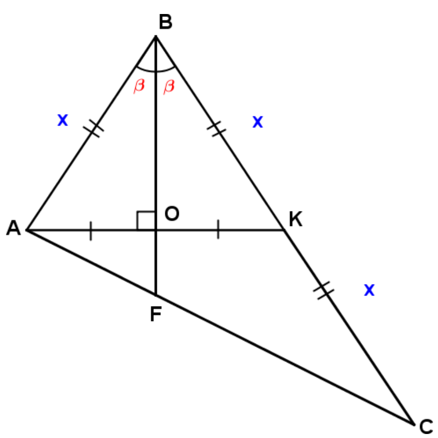
4) Пифагор теоремасын қолдана отырып ABC үшбұрышының қабырғаларын табамыз:

$AB = 52\sqrt{13}$

$BC = 2AB = 104\sqrt{13}$

$AC = 3AF = 3 \cdot 52\sqrt{5} = 156\sqrt{5}$

Жауабы: $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{5}$



Сурет 4. Есепті шешудің тригонометриялық әдісіне сурет салу

5 – Шешімі. Аудандар әдісі (сурет 5)

1) $AO = OK = 104, BF = 208, AK \perp BF$, онда

$S_{\Delta ABF} = S_{\Delta BKF} = \frac{1}{2} \cdot 104 \cdot 208 = 10816$

2) $S_{\Delta CKF} = 10816$, FK медиана ΔBFC үшбұрышын тең екі үшбұрышқа бөледі $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = 3 \cdot 10816$.
3) AK – медиана $\Delta ABC \Rightarrow S_{\Delta ABK} = \frac{3 \cdot 10816}{2}$.
4) $S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO$, $S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} S_{ABK}$

$$\frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10816}{2}$$

$$AO \cdot BO = \frac{3 \cdot 10816}{2} = 3 \cdot 5408$$

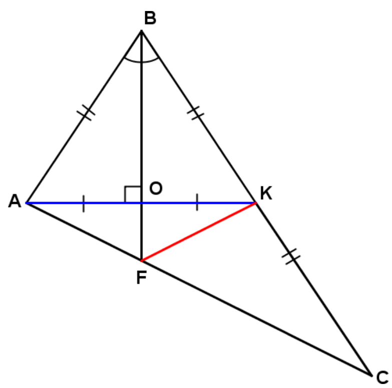
$$BO = \frac{3 \cdot 5408}{AO} = \frac{3 \cdot 5408}{104} = 156.$$

Сонымен, $BO = 156, AO = 104, OF = BF - BO = 208 - 156 = 52$.

5) Пифагор теоремасын қолдана отырып ABC үшбұрышының қабырғаларын табамыз:

$AB = 52\sqrt{13}$
$BC = 2AB = 104\sqrt{13}$
$AC = 3AF = 3 \cdot 52\sqrt{5} = 156\sqrt{5}$

Жауабы: $AB = 52\sqrt{13}$, $BC = 104\sqrt{13}$, $AC = 156\sqrt{5}$



Сурет 5. Аудандар әдісін қолдана отырып есепті шығаруға арналған сурет

6 – Шешімі. Менелай теоремасын қолдану (сурет 6)

Менелай Александрийский – ежелгі грек математигі және астрономы. Менелай теоремасы. Түзу ABC үшбұрышын қиып өтсін делік. Түзу AB қабырғасын C_1 нүктесінде, BC қабырғасын A_1 нүктесінде және AC қабырғасының созындысын B_1 нүктесінде қиып өтсе, онда келесі қатынас орындалады: $\frac{AC1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$

1) BF кесіндісі ΔACK үшбұрышын O және F, CK қабырғасының созындысын B нүктесінде қиып өтеді.

Менелай теоремасы бойынша ΔACK үшбұрышын және BF кесіндісін қарастырамыз:

$\frac{AF}{FC}\cdot\frac{CB}{BK}\cdot\frac{KO}{OA}=1$, $\frac{CB}{BK}=\frac{2}{1}$, $KO=OA=104$ онда:

$\frac{AF}{FC}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{104}{104}=1$, $\frac{AF}{FC}=\frac{1}{2}\Rightarrow FC=2AF,\ \ AC=3AF.$

2) Менелай теоремасы қолдана отырып ΔBCF үшбұрышын және BF кесіндісін қарастырамыз:

$\frac{BO}{OF}\cdot\frac{AF}{AC}\cdot\frac{CK}{KB}=1$, $CK=KB,\ \ AF=\frac{1}{2}FC,$ онда $\frac{BO}{OF}\cdot\frac{AF}{3AF}\cdot\frac{CK}{KB}=1$,

$\frac{BO}{OF}=\frac{3}{1}$,

$BF=BO+OF=3OF+OF$

$208=3OF+OF$

$OF=52,\qquad BO=3\cdot 52=156.$

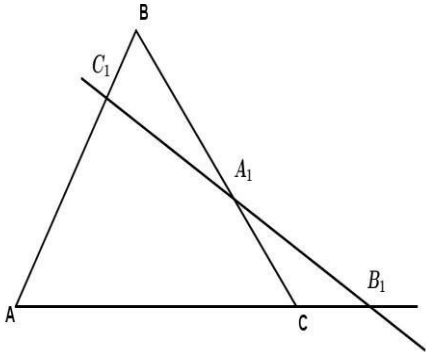
3) Пифагор теоремасын қолдана отырып ABC үшбұрышының қабырғаларын табамыз:

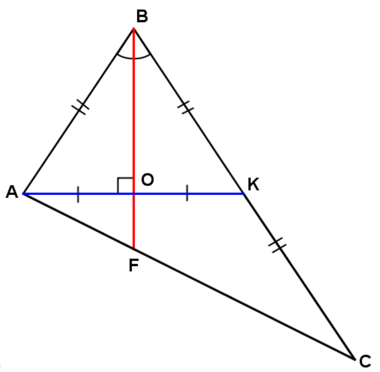
$AB=52\sqrt{13}$

$BC=2AB=104\sqrt{13}$

$AC=3AF=3\cdot 52\sqrt{5}=156\sqrt{5}$

Жауабы: $AB=52\sqrt{13}$, $BC=104\sqrt{13}$, $AC=156\sqrt{5}$





Сурет 6. Менелай теоремасын қолдану

Есепті жоғарыда көрсетілген әдістермен шеше отырып, қосымша мәліметтерді оқи отырып, біз геометриялық есептерді шешудің ұтымды тәсілдері бар деген қорытындыға келдік. Осы есепті шығарған кезде ең оңтайлы әдіс (қарапайым және ыңғайлы) – үшбұрыштың орта сызығы туралы теореманы қолдану. Аудандар әдісі де қарапайым және ыңғайлы. Тригонометриялық әдіс үлкен сандар үшін тиімсіз. Тақырып бойынша жұмыс жасағанда Менелай теоремасын қолдандық. Оны қолдану өте ерекше және қызықты болды. Біз қарастырған геометриялық есептің оңтайлы әдісін таптық, жұмыстың мақсатына қол жеткіздік деп санаймын.

Пайдаланған әдебиеттер тізімі

1 Ж.Т. Қайыңбаев, Д. Төлбасы . Менелай теоремасы және оның қолданылуы. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods. 2021/1 (54).

2 Ж.Т. Қайыңбаев, А.С. Ғалымжан. Геометриялық есептерді тригонометриялық мәселелердің көмегімен шешу тәсілдері. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods. 2021/1 (54).

3 Ж.Т. Қайыңбаев, Т.С. Манап. Үшбұрыштың биссектрисасы, медианасы және олардың қасиеттерін пайдаланып күрделі геометриялық есептерді шешу тәсілдері. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods 2021/2 (55).

4 Кулагин Е.Д. и др 3000 конкурсных задач по математике. – М., 2003. – 380 с.

5 Генденштейн Л.Э., Ершова А.П., Ершова А.С. Наглядный справочник по математике с примерами. Для абитурентов, школьников, учителей. – М.: Илекса, 2005, – 192 с.

6 Атанасян, Л. С. Геометрия. 7-9 классы : учеб. общеобразоват. учреждений [Текст] / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2015. – 384 с.

7 Атанасян, Л. С. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений [Текст] / Л. С. Атанасян и др. – М. : Просвещение, 2011.

8 Зив, Б. Г. Задачи по геометрии: пособие для учащихся 7-11 классов [Текст] / Б. Г. Зив, В. М. Мейлер. – М. : Просвещение,

2014.
9 Готман, Э. Г. Задачи по планиметрии и методы их решения: Пособие для учащихся. [Текст] / Э. Г. Готман. – М. : Просвещение, 1996

References

1 J.T. Qaiyñbaev, D. Tölbasy . Menelai teoremasy jäne onyñ qoldanyluy. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods. 2021/1 (54).
2 J.T. Qaiyñbaev, A.S. Ğalymjan. Geometrialyq esepterdı trigonometrialyq mäselelerdıñ kömegımen şeşu täsılderı. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods. 2021/1 (54).
3 J.T. Qaiyñbaev, T.S. Manap. Üşbūryştyñ bisektrisasy, medianasy jäne olardyñ qasietterın paidalanyp kürdelı geometrialyq esepterdı şeşu täsılderı. SDU Bulletin: Pedagogy and Teaching methods 2021/2 (55).
4 Kulagin E.D. i dr 3000 konkursnyh zadach po matematike. – M., 2003. – 380 s.
5 Gendenştein L.E., Erşova A.P., Erşova A.S. Naglädnyi spravochnik po matematike s primerami. Dlä abiturentov, şkölnikov, uchitelei. – M.: İleksa, 2005, – 192 s.
6 Atanasän, L. S. Geometria. 7-9 klasy : ucheb. obşeobrazovat. uch-rejdeni [Teks] / L. S. Atanasän, V. F. Butuzov, S.B. Kadomsev i dr. – M. : Prosveşenie, 2015. – 384 s.
7 Atanasän, L. S. Geometria. 10-11 klasy: uchebnik dlä obşeobrazovatelnyh uchrejdeni [Teks] / L. S. Atanasän i dr. – M. : Prosveşenie, 2011.
8 Ziv, B. G. Zadachi po geometrii: posobie dlä uchaşihsä 7-11 klasov [Teks] / B. G. Ziv, V. M. Meiler. – M. : Prosveşenie, 2014.
9 Gotman, E. G. Zadachi po planimetrii i metody ih reşenia: Posobie dlä uchaşihsä. [Teks] / E. G. Gotman. – M. : Prosveşenie, 1996

S.A. Alpamys[1]
[1]Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan
*e-mail: samalbek_96@mail.ru

SEEKING OPTIMAL METHODS FOR SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS.

Abstract. Currently, we are observing a lot of new phenomena occurring in the environment around us. These phenomena require any person to have new qualities. First of all, society needs people who think outside the box, make decisions based on their own thinking and offer new initiatives. Such qualities can be formed in math lessons or in extracurricular time, solving problems. In a geometry textbook, the solution of geometric problems is often based on a standard algorithm. This algorithm can be difficult for students. Therefore, it is necessary to find the optimal method in search of other different ways to solve geometric problems. In this article, we will find the optimal method by describing several methods for solving a single geometric problem. Solving a geometric problem by various methods deepens students' mathematical knowledge and develops creative abilities.

Keywords: Triangle, Menelaus' theorem, Pythagorean theorem, coordinate method, creativity, optimal method.

С.А.Алпамыс[1]

[1]Университет имени Сулеймана Демиреля, Каскелен, Казахстан

*e-mail: samalbek_96@mail.ru

ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Аннотация. В настоящее время мы наблюдаем множество новых явлений, происходящих в окружающей нас среде. Эти явления требуют от любого человека наличия новых качеств. Прежде всего, обществу нужны люди, которые мыслят нестандартно, выносят решения на основе собственного мышления и предлагают новые инициативы. Такие качества можно формировать на уроках математики или во внеурочное время, решая задачи. В учебнике геометрии решение геометрических задач часто основывается на стандартном алгоритме. Этот алгоритм может быть сложным для учащихся. Поэтому необходимо найти оптимальный метод в поисках других различных способов решения геометрических задач. В этой статье мы найдем оптимальный метод, описав несколько методов решения одной геометрической задачи. Решение геометрической задачи различными методами углубляет математические знания учащихся и развивает творческие способности.

Ключевые слова: Треугольник, теорема Менелая, теорема Пифагора, метод координат, креативность, оптимальный метод.

Received 19 February 2023